SECONDA UNIVERSITA' DI NAPOLI

Facoltà di Ingegneria

Guida alla verifica della preparazione di base per l'accesso ai corsi di laurea in Ingegneria

a.a. 2006/2007

Maggio 2006

INDICE

INTRODUZIONE

L'**ingegneria** fornisce i metodi per la produzione di un manufatto, lo sviluppo e il controllo di un processo o in generale di un sistema organizzato.

Per trovare le soluzioni adatte ai problemi che affrontano, gli ingegneri prendono “in prestito” idee dalla **fisica** e dalla **matematica**, applicando il metodo scientifico nel derivare e verificare le soluzioni proposte; inoltre, per migliorare le loro conoscenze e la sicurezza del prodotto, del controllo o della soluzione si avvalgono, per quanto possibile, di un modello, di esperimenti e di prove di laboratorio.

Per l’acquisizione e lo sviluppo delle competenze nelle diverse discipline, rivestono fondamentale importanza capacità trasversali come il **metodo di studio** e la **capacità di apprendimento**. Pertanto, l’accesso ai corsi di laurea in ingegneria richiede i seguenti prerequisiti:

- capacità di comprensione verbale;
- conoscenze scientifiche di base;
- attitudine ad un approccio metodologico.

Più in particolare tali competenze preliminari possono essere descritte come capacità di :

- lettura ed interpretazione di un testo;
- scrittura di un documento tecnico-scientifico;
- padronanza dei metodi, degli strumenti e dei modelli della matematica e della fisica di base;
- autovalutazione delle conoscenze e delle abilità.

Buone **capacità generali** serviranno all’allievo per **migliorare i risultati** nello studio di ogni disciplina e, successivamente, ad agevolare il suo **accesso nel mondo del lavoro**. A tal proposito si sottolinea l’interesse a qualificare gli studi di ingegneria, tenendo conto che una laurea dequalificata conduce ad una minore competitività della laurea stessa. Il sistema delle imprese è infatti interessato a laureati nelle scienze dell’ingegneria, ma ha necessità di giovani con la capacità d’affrontare i complessi e diversificati problemi che la tecnologia pone: laureati di basso profilo rischiano di incontrare difficoltà nella ricerca di lavoro.

Gli studenti intenzionati ad immatricolarsi nella Facoltà di Ingegneria della SUN, così come nelle altre scuole di ingegneria italiane, sono tenuti ad affrontare una **prova di autovalutazione** con modalità identiche per tutti i corsi di laurea.

La prova ha esclusivamente **finalità orientative e non selettive** (numero chiuso); essa permette di formulare una graduatoria degli aspiranti basata sulle loro attitudini ad intraprendere con successo gli studi di ingegneria.
La prova consiste nel rispondere, secondo prefissate cadenze temporali, ad una serie di quesiti per aree tematiche, selezionando la risposta esatta tra quelle proposte (**quesiti a risposta multipla**).

Non è richiesta una specifica preparazione per affrontare la prova, se non un attento ripasso degli elementi di base di matematica, fisica e chimica, della scuola media superiore.

Questa fase di preparazione preliminare è fortemente suggerita agli allievi che intendono intraprendere gli studi di ingegneria, non solo in relazione alla prova di autovalutazione, ma anche e soprattutto per iniziare in modo proficuo il nuovo percorso formativo. Si raccomanda, perciò, all'aspirante allievo di affrontare la prova serenamente, ma con la massima concentrazione e dopo avere effettuato un'adeguata fase di preparazione.

La preparazione delle prove è stata affidata dalla Facoltà di Ingegneria della SUN, così come dalla maggior parte delle altre facoltà italiane, al **CISIA** (Centro Interuniversitario per l'Accesso alle Scuole di Ingegneria e Architettura). La data della prova (che avviene nello stesso giorno ed alla stessa ora in tutte le facoltà italiane partecipanti al CISIA) insieme alle modalità per lo svolgimento della stessa saranno fornite agli allievi al momento della pre-iscrizione.

Alla luce di quanto prima richiamato, lo scopo del presente documento vuole essere essenzialmente quello di fornire agli studenti che intendono iscriversi presso la Facoltà di Ingegneria della SUN , un **supporto didattico** ed una **guida** che li aiuti a prepararsi alla prova di autovalutazione e, nel contempo, ad un corretto e sereno impatto con i nuovi studi da intraprendere.

La guida viene presentata anche ai Colleghi delle Scuole Secondarie, in particolare quelle che rappresentano la platea scolastica territorialmente afferente alla Facoltà di Ingegneria della SUN: con tali docenti la Facoltà intende infatti avviare una fattiva collaborazione finalizzata ad aiutare lo studente in una scelta più consapevole del percorso formativo in ingegneria, riducendo le difficoltà che mediamente egli incontra quando intraprende tale percorso.

Il documento, realizzato grazie al contributo ed alla collaborazione dei docenti di matematica e di fisica della Facoltà, è stato strutturato in tre Capitoli ed una Appendice.

Nel Capitolo 1 vengono richiamati i **prerequisiti generali** che necessitano per l'accesso agli studi di ingegneria, ricordando che tra questi, accanto alle conoscenze di base della matematica e della fisica devono essere ripresi anche quelli relativi alla comprensione di un testo ed agli elementi di logica.

Nel Capitolo 2 e nel Capitolo 3, con riferimento specifico allo studio della **matematica e della fisica di base**, vengono indicati i contenuti e le abilità richieste relativamente ai singoli argomenti che necessita conoscere. Successivamente sono presentati diversi temi svolti e commentati che possono essere riguardati dagli allievi come utile riferimento per la fase di ripasso delle conoscenze già acquisite nella scuola media superiore. Al temine di tali capitoli sono altresì forniti alcuni test di autovalutazione, corredati di risposte e commenti, che potranno contribuire all'approfondimento nella fase esercitativa.

Infine, nell'Appendice, si è ritenuto opportuno allegare in via esemplificativa il **testo della prova** tenuta dal CISIA nell'anno 2005, con l'auspicio di fornire all'aspirante studente di ingegneria un ulteriore supporto nella sua fase di preparazione per l'accesso alla Facoltà.

Aversa, 18 maggio 2006

Il Preside
Prof. Michele Di Natale

CAPITOLO I

Prerequisiti per l'accesso ai corsi di laurea in ingegneria

L'attitudine a conoscere e la curiosità di indagare il funzionamento di qualsiasi apparato sono i prerequisiti fondamentali che devono caratterizzare coloro che intraprendono gli studi di Ingegneria e questo deve essere accompagnato da una buona padronanza della matematica, anzi, più in generale, è necessaria una buona conoscenza dei concetti matematici e fisici che lo studente ha incontrato nell'intero curriculum scolastico. Tuttavia, coloro che si iscrivono alla Facoltà di Ingegneria possiedono una formazione di carattere fisico-matematico molto diversificata e legata al tipo di percorso formativo secondario che hanno seguito. In passato la durata dei corsi consentiva di dedicare una prima, se pur breve, parte del tempo ad una rivisitazione dei concetti base in modo che gli allievi raggiungessero un livello al quanto omogeneo; oggi, in seguito all'avvio della riforma degli studi universitari, non è più possibile fare questo lavoro preliminare e dunque si avverte, ancora più forte che in passato, l'esigenza di collaborare con la Scuola Secondaria con lo scopo di aiutare gli studenti a conseguire un livello di formazione uniforme ed un bagaglio culturale sufficiente ed adeguato ad affrontare studi scientifici.

Nel seguito quindi si elencano alcuni aspetti fondamentali che, alla luce dell'esperienza didattica degli ultimi anni, si sono rivelati delicati ed essenziali.

<u>Comprensione di un testo</u>

Un primo obiettivo assolutamente necessario è che lo studente abbia acquisito la capacità di interpretare correttamente il significato di un brano per farne una sintesi scritta e per rispondere a quesiti sul suo contenuto, evitando di fare uso di conoscenze pregresse sull'argomento delle quali eventualmente dispone. Questa capacità lo mette in grado di assimilare i concetti e di capire non solo il significato di un testo ma soprattutto quello che è possibile dedurre da esso o ciò che da esso non è logico concludere.

Per verificare il livello di comprensione raggiunto dopo la lettura di testi tratti da saggi, opere letterarie o articoli di giornale è utile rispondere a domande che vertono sul concetto centrale espresso nel testo, su conseguenze che possono essere logicamente dedotte da esso e che quindi ne richiedono una lettura critica, sul significato di vocaboli contenuti nel brano.

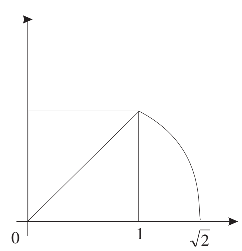
Comprensione del testo di un problema matematico

E' importante che si acquisisca la capacità di schematizzare le informazioni presenti in un testo di un problema (ipotesi, tesi,…) e procedere alla loro formalizzazione per comprendere gli strumenti matematici necessari per la soluzione.

Calcolo numerico e letterale

Lo studente deve quotidianamente operare con i numeri reali e quindi è assolutamente indispensabile che ne abbia una buona conoscenza ed abbia dimestichezza con il loro uso. Ad esempio è certamente formativo capire come i numeri razionali non sono sufficienti per la misura di tutte le lunghezze osservando che il lato di un quadrato e la sua diagonale non sono commensurabili, o, come nell'esempio che segue, rappresentano punti sulla retta, senza i quali avremmo dei veri e propri *"buchi"* sulla retta.

Dopo aver riportato su una retta orientata, su cui è stata fissata un'unità di misura, i numeri naturali, si riporti un quadrato di lato unitario a partire dall'origine e poi, tramite un compasso, la lunghezza della diagonale del quadrato sulla retta.



Si troverà un punto che non coincide con quelli già segnati ma che non corrisponde neanche a un numero razionale. Quindi non si riesce a trovare in alcun modo un sottomultiplo del lato del quadrato contenuto un numero intero di volte nella diagonale, che allora non è misurabile "esattamente".

E' inoltre molto utile comprendere che nei calcoli che coinvolgono numeri reali il considerare solo un numero finito di cifre porta inevitabilmente ad errori e che è indispensabile saper utilizzare le operazioni di arrotondamento e troncamento.

Ad esempio, dopo aver dimostrato che $\sqrt{2}$ è irrazionale, può essere utile costruire due successioni di numeri razionali che lo approssimano per difetto e per eccesso. A tale scopo si può considerare la successione approssimante per difetto:

1: $(1)^2 = 1$
1,4: $(1{,}4)^2 = 1{,}96$
1,41: $(1{,}41)^2 = 1{,}9881$
1,414: $(1{,}414)^2 = 1{,}999396$
…………………………………………

e la successione approssimante per eccesso:

2: $(2)^2 = 4$
1,5: $(1{,}5)^2 = 2{,}25$
1,42: $(1{,}42)^2 = 2{,}0164$
1,415: $(1{,}415)^2 = 2{,}002425$
……………………………………………..

Le due successioni tendono al valore $\sqrt{2}$ e le approssimazioni saranno sempre migliori; il valore $\sqrt{2}$ rimane per così dire "intrappolato" tra le due successioni e ne costituisce l'elemento di separazione. Quindi i "buchi irrazionali" sono "accerchiati" dai numeri razionali, che si addensano alla loro destra e sinistra.

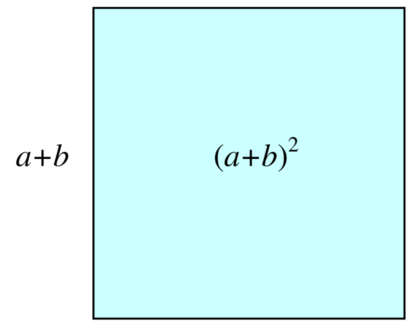
Gli studenti rivelano non poche difficoltà ad acquisire la sensibilità al "numero" e la scioltezza in semplici valutazioni numeriche. Il forte accento posto sul calcolo letterale finisce col creare questa difficoltà nello studente, che spesso non riesce a dare una stima al calcolo svolto, nemmeno in termini di ordini di grandezza. Acquisire l'intuito per valori di riferimento plausibili per le grandezze calcolate è un primo passo verso lo sviluppo dello spirito critico indispensabile per lo studio delle materie scientifiche.

Ad esempio, nell'insegnamento della cinematica si potrebbe "visualizzare" una velocità di 1m/s camminando a grandi passi nell'aula, per dare un valore di riferimento della grandezza. Lo studente potrebbe poi individuare valori plausibili per la velocità di un'auto, un aereo, etc. E' una velocità di 100m/s plausibile per un uomo? E una macchina, un aereo?

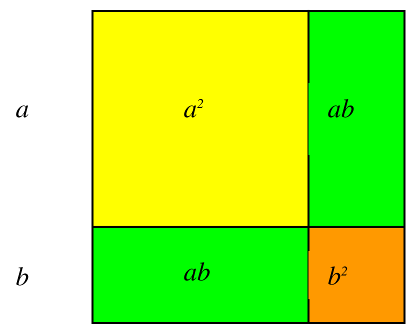
Semplici valutazioni numeriche fatte a mente sviluppano la familiarità col "numero". Anche espressioni algebriche semplici (quadrato del binomio, prodotti notevoli, etc.) andrebbero verificate con l'inserimento di valori numerici.

Ad esempio con riferimento al prodotto notevole $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ si può verificare numericamente tale identità dando dei valori particolari ad *a* e *b*, o geometricamente, come mostrato di seguito:

$$(a+b)^2$$



$$a^2+b^2+2ab$$



Tale metodo tende anche a far interiorizzare la necessità di un controllo *ex-post* del risultato ottenuto, procedura indispensabile se si intendono proseguire gli studi scientifici.

L'utilizzo del calcolo numerico è eccellente per “visualizzare” un concetto complesso come quello di limite ed è realizzabile con una calcolatrice tascabile.

Ad esempio, assegnata l’equazione oraria per la posizione di un punto materiale $x = 5t^2$, si può calcolare la velocità del punto nell’istante $t_0 = 2$ sec. Derivando l’equazione oraria una volta rispetto al tempo, si ottiene $v = 10t$ da cui $v(t = t_0) = v_0 = 20\, m/s$; in alternativa, si può utilizzare la definizione di derivata $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ dove $t = t - t_0$ e $x = x - x_0$, con $x_0 = x(t = 2s) = 20$m. Si considera una successione di istanti di tempo sempre più vicini a t_0, si calcola la posizione x in ciascuno di questi istanti e si determina la successione di rapporti incrementali

$\Delta t = t - t_0$	$\Delta x = x - x_0$	$\Delta x/\Delta t$
1	25	25
0,5	11,25	22,5
0,2	4,2	21
0,1	2,05	20,5
0,01	0,2001	20,05

e si osserva come essa "converge" al valore della velocità calcolato prima di 20 m/s.

Ancora sarebbe estremamente formativo riguardare operazioni come la derivata o l'integrale definito, attraverso valutazioni numeriche successive di un rapporto incrementale o somma di aree.

Ad esempio si possono calcolare il valore delle aree dei plurirettangoli inscritti e circoscritti (le somme di Riemann) nella parabola $y = x^2$ con intervallo base $[1,3]$.

Si divide l'intervallo $[1,3]$ in 2^2 parti, poi in 2^3, e cosi via in 2^n parti. Per ogni partizione dell'intervallo si calcolano le somme di Riemann inferiori s_n:

$s_2 = 0{,}5\left(1 + (1{,}5)^2 + 2^2 + (2{,}5)^2\right) = 6{,}75$,

$s_3 = 0{,}25\left(1 + (1{,}25)^2 + (1{,}5)^2 + (1{,}75)^2 + 2^2 + (2{,}25)^2 + (2{,}5)^2 + (2{,}75)^2\right) = 7{,}68$

……………………………………………………

e quelle superiori S_n:

$S_2 = 0{,}5\left((1{,}5)^2 + 2^2 + (2{,}5)^2 + 3^2\right) = 10{,}75$,

$S_3 = 0{,}25\left((1{,}25)^2 + (1{,}5)^2 + (1{,}75)^2 + 2^2 + (2{,}25)^2 + (2{,}5)^2 + (2{,}75)^2 + 3^2\right) = 9{,}68$

…………………………………………………………..

Quindi si costruisce la seguente tabella:

s_2	s_3	s_4	……………..	s_n
6,75	7,68	……………….	………………..	……………..

e

S_2	S_3	S_4	……………..	S_n
10,75	9,68	……………….	………………..	……………..

Le aree s_n e S_n godono della proprietà $s_n < area(T) < S_n$ e all'aumentare di n tendono ad avvicinarsi da sinistra e da destra al valore

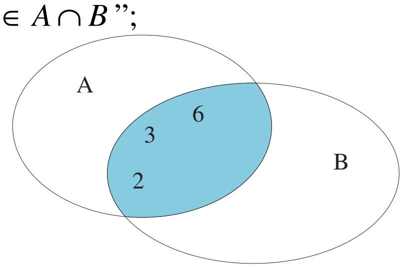
$$area(T) = \frac{26}{3} = 8{,}666...$$

<u>Elementi di logica</u>

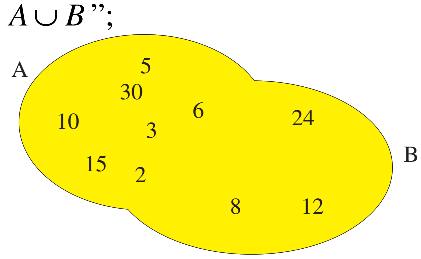
E' altresì importante che lo studente acquisisca l'attitudine ad affrontare un qualsiasi problema con metodo scientifico ovvero sia capace di individuarne i dati, di utilizzare le ipotesi elaborando un ragionamento rigoroso per giungere alla veridicità della tesi. Perchè tutto ciò sia possibile occorre aver acquisito la capacità di seguire accuratamente una sequenza di affermazioni connesse tra loro comprendendone le implicazioni, di distinguere ragionamenti coerenti da conclusioni prive di fondamento. Per controllare la correttezza logica di un ragionamento bisogna saper eseguire un certo numero di "operazioni" di base sulle frasi; in particolare è necessario :

- saper utilizzare i connettivi logici "e", "o" e "non" per comprendere i quali è utile mettere in evidenza la loro relazione con le corrispondenti operazioni insiemistiche di "intersezione", unione" e "complemento".

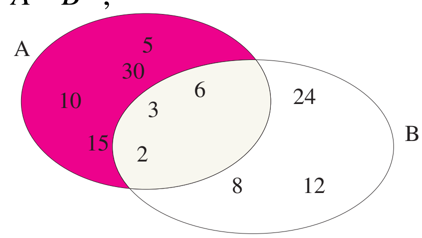
Ad esempio l'operazione di intersezione di insiemi è corrispondente all'operazione logica di congiunzione: se A è l'insieme dei divisori di 30 e B è l'insieme dei divisori di 24, l'affermazione "3 è un divisore di 30 e un divisore di 24" è equivalente a "$3 \in A \cap B$";



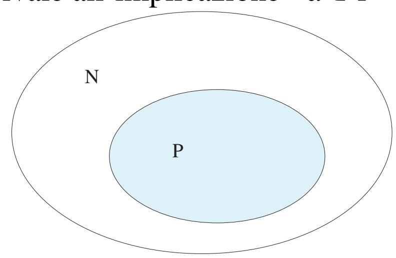
l'operazione di unione di insiemi è corrispondente all'operazione logica di disgiunzione inclusiva: l'affermazione "5 è un divisore di 30 o un divisore di 24" è equivalente a "$5 \in A \cup B$";



l'operazione di complemento insiemistico è corrispondente all'operazione logica di negazione: l'affermazione "5 è un divisore di 30 e non un divisore di 24" è equivalente a "$5 \in A - B$";



la relazione di inclusione insiemistica è corrispondente all'implicazione logica: se P è l'insieme dei numeri pari e N è l'insieme dei numeri naturali, la relazione "$P \subseteq N$" equivale all'implicazione "$a \in P \Rightarrow a \in N$".



- saper negare correttamente un'affermazione.

Ad esempio, la corretta negazione della frase *"oggi l'allievo ha studiato storia e matematica"* non è "*oggi lo studente non ha studiato né storia né matematica"* ma piuttosto "*oggi lo studente non ha studiato storia oppure non ha studiato matematica"*; assegnato l'insieme $I = \{1,2,3,4,5,6\}$ la corretta negazione della frase "*ogni elemento di I soddisfa la relazione* $x + 1 < 5$*"* è "*esiste almeno un elemento* x_0 *di I tale che* $x_0 + 1 \geq 5$*";* la corretta negazione della proposizione "*esiste almeno un elemento* x_0 *di I tale che* $x_0 + 1 = 10$*"* è "*ogni elemento* x *di I è tale che* $x_0 + 1 \neq 10$*"*;

- saper stabilire se una proposizione ne implica un'altra.

Ad esempio, assegnate le proposizioni P: "*n è un intero divisibile per* 8*"* e P': "*n è un intero divisibile per* 2*"*, si riconosce che P $\Rightarrow$ P' poiché ogni intero che ha la proprietà P ha anche la proprietà P' e naturalmente che l'implicazione opposta non sussiste, esistendo interi divisibili per 2 ma non per 8;

- saper decidere se due proposizioni sono equivalenti sicché bisogna esaminare la relazione causa-effetto che lega due eventi per distinguere le relazioni legate da un rapporto di "sufficienza" rispetto a quelle legate da un rapporto di "necessità".

Ad esempio, date le proposizioni P: "α *e* β *sono angoli opposti al vertice"* e P_1:"α *e* β *sono angoli congruenti"* , si deduce che P $\Rightarrow$ P_1 ovvero che la P è una condizione sufficiente affinché si verifichi la P_1. Evidentemente si riconosce poi che essa non è necessaria dal momento che due angoli possono essere congruenti pur non essendo opposti al vertice e ancora che P_1 è condizione necessaria per il verificarsi della P ma non è sufficiente; invece, tra le due proposizioni che seguono P: "*il triangolo ha due lati congruenti"* e *P'*: *"il triangolo ha due angoli congruenti"* sussiste la relazione P $\Leftrightarrow$ *P'* poiché il verificarsi di ciascuna di esse è condizione necessaria e condizione sufficiente per la veridicità dell'altra.

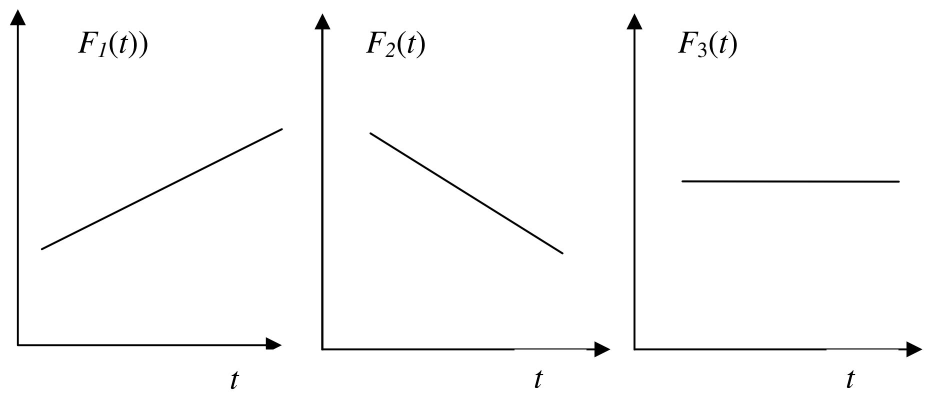
Queste capacità mettono in grado di capire come si articoli un ragionamento costruttivo ed anche argomentazioni più delicate come il ragionamento per assurdo o per induzione.

Gestione di diversi linguaggi

Nel corso degli studi lo studente dovrà confrontarsi con l'utilizzo di linguaggi diversi nella trattazione di un problema dato: il linguaggio algebrico (equazioni), il linguaggio grafico (rappresentazione di curve) e, chiaramente, il linguaggio verbale. Molto spesso il passaggio da un linguaggio ad un altro è estremamente faticoso: saper tradurre le proprietà geometriche in espressioni e condizioni algebriche (e viceversa) è un punto fondamentale della preparazione. Inoltre tutti i fenomeni fisici vengono modellizzati usando il piano o lo spazio cartesiano e quindi risulta essenziale acquisire dimestichezza con i suoi "oggetti" (rette, curve, …) e con le relazioni che intercorrono tra essi. E' necessario aver chiaro che un grafico non è altro che una diversa rappresentazione di una funzione e occorre interpretare il grafico in funzione delle grandezze rappresentate sugli assi.

Ad esempio, assegnate delle curve nel piano cartesiano, è utile farne una descrizione qualitativa (funzione crescente, decrescente, costante, etc.)

Date le rette $F_1(t)$, $F_2(t)$ e $F_3(t)$ nel piano come indicato nella figura seguente, esse possono essere "lette" in diversi modi: se i valori $F_i(t)$ rappresentano la posizione di un punto materiale ad un certo istante t, esse costituiscono la traiettoria di un punto che si allontana dall'origine (i = 1), si avvicina dall'origine (i = 2) o è in quiete (i = 3) al trascorrere del tempo t; se i valori $F_i(t)$ rappresentano la velocità di un punto materiale in funzione del tempo, si riconoscerà, rispettivamente, un moto accelerato, decelerato o a velocità costante. In tali semplici casi, lo studente dovrebbe poter ricavare le equazioni orarie dall'osservazione del grafico stesso.

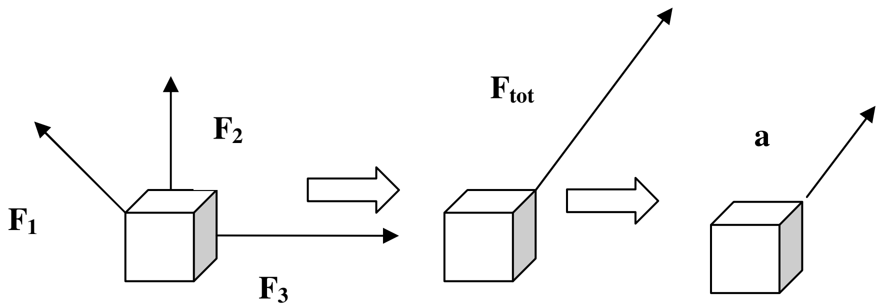


Sviluppo dello spirito critico

Nello svolgimento di un problema posto lo studente, oltre a controllare l'esattezza del valore numerico, dovrebbe anche aver chiara la plausibilità del risultato dal punto di vista fisico. Calcolare l'accelerazione di un grave e trovarla orientata verso l'alto, oppure trovare che la velocità di un grave nell'impatto al suolo è diretta verso l'alto, o ancora che un corpo in moto ha contemporaneamente velocità e accelerazione nulle, dovrebbero immediatamente suggerire che il risultato è sbagliato.

Per quel che riguarda la fisica classica, il principio che sottende tutte le leggi fisiche è il *Principio di causalità.* Premesso che l'introduzione di questo concetto con tutte le sue implicazioni è alquanto complessa, sarebbe comunque utile iniziare a familiarizzare con la relazione di causa-effetto nell'ambito della dinamica del punto.

Ad esempio, è utile riflettere sulla circostanza che la presenza di un insieme di forze vettoriali deve necessariamente produrre una data accelerazione vettoriale o, viceversa, che l'osservazione di una certa accelerazione implica la presenza di forze di risultante data.



Inoltre per sviluppare lo spirito di osservazione, è indispensabile imparare a guardarsi intorno, ad osservare la natura e a porsi domande. Non necessariamente si deve saper dare le risposte ad ogni questione, ma la stimolazione della curiosità può aiutare a compiere una scelta del percorso formativo più cosciente e consapevole.

CAPITOLO II

Le conoscenze di matematica

La Matematica come disciplina base del pensiero umano

La Matematica, parte rilevante del pensiero umano ed elemento motore dello stesso pensiero filosofico, ha in ogni tempo operato su due fronti: da una parte si è rivolta a risolvere problemi ed a rispondere ai grandi interrogativi che man mano l'uomo si poneva sul significato della realtà che lo circonda; dall'altra, sviluppandosi autonomamente, ha posto affascinanti interrogativi sulla portata, il significato e la consistenza delle sue stesse costruzioni culturali.

Oggi queste due attività si sono ancor più accentuate e caratterizzate. La prima per la maggiore capacità di interpretazione e di previsione che la matematica ha acquistato nei riguardi dei fenomeni non solo naturali, ma anche economici e della vita sociale in genere, e che l'ha portata ad accogliere e a valorizzare, accanto ai tradizionali processi deduttivi, anche i processi induttivi; la seconda per lo sviluppo del processo di formalizzazione che ha trovato nella logica e nell'informatica un riscontro significativo. Sono due spinte divergenti, ma che determinano con il loro mutuo influenzarsi il progresso del pensiero matematico.

Coerentemente con questo processo, l'insegnamento della matematica si è sempre estrinsecato e continua a esplicitarsi in due distinte direzioni: a "leggere il libro della natura" ed a matematizzare la realtà esterna da una parte, a simboleggiare ed a formalizzare, attraverso la costruzione di modelli interpretativi, i propri strumenti di lettura dall'altra; direzioni che però confluiscono, intrecciandosi ed integrandosi con reciproco vantaggio, in un unico risultato: la formazione e la crescita dell'intelligenza dei giovani.
Infatti lo studio della matematica:

- *promuove le facoltà sia intuitive sia logiche,*
- *educa ai procedimenti euristici, ma anche ai processi di astrazione e di formazione dei concetti,*
- *esercita a ragionare induttivamente e deduttivamente,*
- *sviluppa le attitudini sia analitiche sia sintetiche,*

determinando così nei giovani abitudine alla sobrietà e precisione del linguaggio, cura della coerenza argomentativa, gusto per la ricerca della verità. L'insegnamento della matematica enuclea ed affina queste varie *attività, caratterizzandole, ma nello stesso tempo fondendole in un unico processo culturale e formativo.*

Tali attività concorrono, in armonia con l'insegnamento delle altre discipline, alla promozione culturale ed alla formazione umana dei giovani, anche se intendono intraprendere studi non scientifici.

Lo studio della matematica cura e sviluppa anche:

- l'acquisizione di conoscenze a livelli più elevati d'astrazione e di formalizzazione;

- la capacità di cogliere i caratteri distintivi dei vari linguaggi (storico-naturali, formali, artificiali);

- la capacità di utilizzare metodi, strumenti e modelli matematici in situazioni diverse;

- l'attitudine a riesaminare criticamente ed a sistemare logicamente le conoscenze via via acquisite;

- l'interesse sempre più vivo a cogliere gli sviluppi storico-filosofici del pensiero matematico.

Queste finalità s'integrano con quelle proprie delle altre discipline di modo che l'insegnamento della matematica, pur conservando la propria autonomia epistemologico-metodologica, concorra in forma interdisciplinare alla formazione culturale degli allievi.

L' apprendimento della matematica porta a:

- sviluppare dimostrazioni all'interno di sistemi assiomatici proposti o liberamente costruiti;

- operare con il simbolismo matematico riconoscendo le regole sintattiche di trasformazione di formule;

- utilizzare metodi e strumenti di natura probabilistica e inferenziale;

- affrontare situazioni problematiche di varia natura avvalendosi di modelli matematici atti alla loro rappresentazione;

- costruire procedure di risoluzione di un problema e, ove sia il caso, tradurle in programmi per il calcolatore;

- risolvere problemi geometrici per via sintetica o per via analitica;

-interpretare intuitivamente situazioni geometriche spaziali;

-applicare le regole della logica in campo matematico;

- utilizzare consapevolmente elementi del calcolo differenziale;

-riconoscere il contributo dato dalla matematica allo sviluppo delle scienze sperimentali;

-inquadrare storicamente l'evoluzione delle idee matematiche fondamentali;

-cogliere interazioni tra pensiero filosofico e pensiero matematico.

II.1. Contenuti e abilità

CONTENUTI	ABILITA'
Aritmetica	Conoscere i numeri interi e razionali. Conoscere la rappresentazione decimale dei numeri reali. Saper eseguire le operazioni con i numeri e conoscerne le proprietà. Comprendere il significato delle operazioni di arrotondamento e troncamento e saperle applicare in situazioni concrete. Valore assoluto di un numero reale. Potenze, radici e loro proprietà. Logaritmi ed esponenziali.
Algebra	Saper trasformare espressioni algebriche. Conoscere i prodotti notevoli.
Equazioni algebriche	Saper risolvere equazioni in una incognita di primo grado, di secondo grado, biquadratiche, binomie e trinomie. Conoscere le relazioni tra le soluzioni e i coefficienti di un'equazione di secondo grado. Conoscere la regola di Cartesio. Saper risolvere semplici sistemi di equazioni.
Disequazioni algebriche	Saper risolvere disequazioni di primo e di secondo grado, sistemi di disequazioni e disequazioni frazionarie. Saper interpretare geometricamente una disequazione. Saper risolvere sistemi di disequazioni.
Geometria euclidea	Conoscere rette, semirette, segmenti, piani, semipiani e angoli. Saper dare la definizione di rette parallele e ortogonali e saper utilizzare le proprietà elementari ad esse relative. Conoscere e saper usare le proprietà elementari di triangoli e quadrilateri. Conoscere i teoremi di Talete, di Pitagora, i criteri di congruenza e di similitudine tra triangoli e saperli utilizzare nell'ambito di problemi. Conoscere le proprietà di circonferenze, corde e tangenti e la relazione tra angoli al centro e angoli alla circonferenza.

	Saper calcolare lunghezze ed aree delle principali figure piane. Conoscere le proprietà di prismi, parallelepipedi, piramidi, cilindri, coni e sfere e saperne calcolare i relativi volumi e aree delle superfici.
Geometria analitica	Saper utilizzare le coordinate cartesiane e conoscere le equazioni cartesiane di retta, circonferenza, ellisse, iperbole e parabola. Comprendere il concetto di pendenza di una retta. Saper scrivere l'equazione di una retta parallela o perpendicolare ad una retta assegnata e saper calcolare la distanza tra rette parallele. Saper scrivere le equazioni di rette tangenti ad una circonferenza, ellisse, iperbole o parabola in un punto.
Funzioni numeriche	Conoscere il concetto di funzione e comprendere la differenza tra funzione iniettiva, suriettiva. Conoscere la definizione di funzione monotona e di funzione invertibile e saperle leggere geometricamente. Conoscere la definizione, il grafico e le proprietà formali delle seguenti funzioni elementari: funzione lineare, funzione potenza con esponente intero, funzione radice, funzione polinomio di secondo grado, funzione valore assoluto. Saper risolvere semplici disequazioni relative a queste funzioni utilizzando il loro grafico.
Trigonometria	Conoscere la misura di un angolo in radianti e saperla convertire in gradi e viceversa. Saper definire seno, coseno, tangente e cotangente di un angolo. Comprendere le principali proprietà delle funzioni goniometriche. Saper calcolare i valori di seno, coseno, tangente e cotangente di angoli complementari, supplementari e opposti. Conoscere e saper utilizzare le formule di addizione, di duplicazione e di bisezione. Saper "risolvere" un triangolo rettangolo. Saper risolvere equazioni e disequazioni trigonometriche.

II.*2 Temi svolti*

In letteratura sono presenti un gran numero di pubblicazioni che hanno lo scopo di aiutare gli studenti dell'ultimo anno della scuola secondaria superiore a verificare le proprie conoscenze, in vista di una prossima iscrizione ad una facoltà scientifica. Tra questi abbiamo ritenuto di sottoporre alla vostra attenzione il Syllabus di Matematica diffuso dall'Unione Matematica Italiana più di quindici anni fa e poi successivamente rivisto ed aggiornato, dal quale abbiamo estratto soltanto i quesiti inerenti ad argomenti che vengono trattati in tutti gli indirizzi e particolarmente necessari per affrontare gli studi di Ingegneria. Gli esercizi proposti sono graduati in due livelli in relazione alla loro difficoltà; di essi viene poi fornita un'esauriente e motivata risposta.

Tema 1

strutture numeriche, aritmetica

1.1 Quesiti di livello base

1.1.1 Eseguire la divisione con resto di 237 per 43 ed esprimere con un'uguaglianza il significato dell'operazione compiuta.

1.1.2 Riscrivere in ordine crescente i seguenti numeri: $\frac{2}{5}$; 0; -1; 0,91; -3; 0,19; 0,003

1.1.3 Eseguendo la "divisione con virgola" fra due interi, in quale caso essa si arresta? Se non si arresta, essa dà luogo, almeno da un certo punto in poi, ad un allineamento decimale periodico. Perché?

1.1.4 Trovare il Massimo Comune Divisore di 10002 e 9999.

1.1.5 Dimostrare che per ogni intero naturale n, il numero $n^3 - n$ è divisibile per 6.

1.1.6 Qual è il maggiore dei due numeri: $5^{1/3}, 3^{1/2}$?

1.1.7 In quali casi gli interi n, n+2 sono primi fra loro? (Ricordiamo che due interi naturali si dicono primi fra loro se hanno come unico divisore comune 1)

1.1.8 E' ben noto che il numero $\sqrt{2}$ è irrazionale; per dimostrarlo si può procedere per assurdo, nel seguente modo. Supponiamo che sia $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ dove p e q sono interi e dove si può esigere che p e q siano primi fra loro. Moltiplicando membro a membro per q ed elevando al quadrato, si trova:

$$2q^2 = p^2.$$

Questa uguaglianza ci dice che p^2 è pari e, perciò, anche p è pari. Infatti se p non fosse multiplo di 2, nemmeno p^2 potrebbe esserlo. Poniamo allora: $p = 2r$; sostituendo si ha $2q^2 = 4r^2$, da cui $q^2 = 2r^2$. Da questa relazione ricaviamo come prima che q è pari; dunque p e q sono entrambi pari: assurdo perché li abbiamo supposti primi fra loro. Si chiede di dimostrare, usando un ragionamento analogo, che $\sqrt{3}$ è irrazionale.

1.2 Quesiti che richiedono maggiore attenzione

1.2.1 La somma di tre numeri interi consecutivi è divisibile per 3. Verificarlo su qualche caso e dimostrarlo. Questo fatto è generalizzabile (e come?) alla somma di quattro interi consecutivi? Di cinque?

1.2.2 Per quali valori interi di n il numero $n^2 - 4n + 3$ è divisibile per 7?

1.2.3 Se è $2{,}3 \leq x \leq 2{,}5$ ed è $-1{,}6 \leq y \leq -1{,}4$, fra quali limiti sono compresi i numeri $x + y$, $x - y$, xy, x/y?

1.3 Risposte commentate

1.1.1 Il quoziente è 5, il resto è 22, e il significato dell'operazione compiuta è espresso dalla relazione: $237 = 43 \cdot 5 + 22$ essendo evidente che $22 < 43$.

1.1.2 L'ordinamento richiesto è, evidentemente, il seguente: -3; -1; 0; 0,003; 0,19; 2/5; 0,91 che può essere opportunamente visualizzato mediante la "retta dei numeri".

1.1.3 Una frazione irriducibile $\frac{a}{b}$ si può esprimere come numero decimale finito (cioè come frazione che ha per denominatore una potenza di 10) quando e soltanto quando il suo denominatore contiene solo fattori 2 e 5. In caso diverso la "divisione con la virgola" non può concludersi. Le successive cifre vengono determinate, una volta esaurite le cifre del dividendo, aggiungendo la cifra 0 ai resti; ma i resti diversi, se il divisore è b, possono essere al più in numero di $b-1$ (infatti, il resto non può essere uguale a 0). Dunque vi sarà un resto che si ripete, dopodiché le cifre si ripeteranno periodicamente. Il periodo allora non può superare $b-1$. E' facile trovare esempi in cui il periodo è $b-1$. Consideriamo, ad esempio, la frazione 3/7; il risultato del calcolo è 0,42857342873… con periodo 6. Esempio di tipo opposto: 5/6 = 0,8333..., con periodo 1.

1.1.4 Ogni divisore comune dei due numeri deve essere anche un divisore della loro differenza; nel caso specifico, deve essere un divisore di $10002-9999 = 3$; è immediato verificare che 3 è effettivamente un divisore comune dei due numeri; perciò esso è il M.C.D.

Su questo principio è basato l'algoritmo di Euclide per la ricerca del M.C.D.

1.1.5 Si ha $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$; il numero è dunque prodotto di 3 interi consecutivi; esso è certamente divisibile per 2 e per 3, dunque per 6.

1.1.6 Si deve avere ben presente che per due numeri reali positivi x, y e per un qualsiasi intero positivo m si ha

$$x^m < y^m \text{ se e soltanto se } x < y .$$

Nel nostro caso, prendendo m = 6, si ha che la disuguaglianza $5^{1/3} < 3^{1/2}$ equivale alla $(5^{1/3})6 < (3^{1/2})^6$, cioè alla $5^2 < 3^3$; ma questa è vera, essendo $25 < 27$. Dunque è vero che il maggiore dei due numeri proposti è $3^{1/2}$.

1.1.7 Ogni divisore comune di due interi è anche divisore della loro differenza; pertanto, ogni divisore comune di n e di n+2 è un divisore di 2; allora, i casi sono due: n ed n+2 sono entrambi pari, cioè entrambi divisibili per 2, oppure entrambi dispari, e allora sono primi fra loro.

1.1.8 Il ragionamento svolto nel testo per provare che $\sqrt{2}$ è irrazionale si applica alla lettera per dimostrare che $\sqrt{3}$ è irrazionale, osservando che se p è un intero naturale tale che p^2 è divisibile per 3, allora anche p è divisibile per 3.

* * *

1.2.1 Si ha: $1 + 2 + 3 = 6$; $7 + 8 + 9 = 24$; In generale, la somma di tre interi consecutivi, cioè il numero $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$ è divisibile per 3.

La somma di quattro interi consecutivi si può scrivere: $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6$ e certamente non è divisibile per 4. Passiamo a cinque interi consecutivi: $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) = 5n + 10 = 5(n + 2)$ e otteniamo evidentemente un numero divisibile per 5. L'enunciato ci stimola ad ottenere una risposta generale, riguardante la somma di k interi consecutivi; si ha:

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+\ldots+(n+k-1)=nk+(1+2+3+\ldots+k-1)=nk+\frac{1}{2}k(k-1).$$

Si vede allora che per k dispari, essendo $k-1$ pari, l'espressione scritta è divisibile per k, mentre per k pari, essendo $k-1$ dispari, l'espressione è divisibile per $\frac{1}{2}k$, ma non per k.

1.2.2 Si ha: $n^2 - 4n + 3 = (n - 1)\cdot(n - 3)$; questo prodotto è divisibile per 7 (che è numero primo) quando e solo quando uno dei fattori lo è. I numeri cercati sono dunque quelli per cui $n - 1 = 7\cdot k$, cioè $n = 1 + 7\cdot k$ ($k = 0,1,2,3, \ldots$), oppure $n - 3 = 7\cdot h$, cioè $n = 3 + 7\cdot h$ ($h = 0,1,2, \ldots$). Notiamo che questi due insiemi di numeri sono disgiunti.

1.2.3 Sappiamo che dalle due disuguaglianze (nello stesso senso!) $a \le b$, $c \le d$ si deduce: $a+c \le b+d$; pertanto, nel nostro caso, si ha:

$$2{,}3+(-1{,}6)\le x+y$$

cioè $0{,}7 \le x+y$; procedendo in modo analogo per l'estremo destro, si ottiene:

$$0{,}7\le x+y\le 1{,}1\ .$$

Per avere i limiti di variabilità di $x-y$, basta tenere presente che $x-y = x+(-y)$. Occorre allora trovare i limiti di variabilità di $-y$; poiché passando agli opposti i sensi delle disuguaglianze si invertono, si ha

$$(*)\qquad 1{,}4\le -y\le 1{,}6$$

perciò procedendo come nel primo caso si ottiene:

$$3{,}7\le x-y\le 4{,}1\ .$$

Per le altre due limitazioni, la via più sbrigativa è quella di ridursi a disuguaglianze tra numeri non negativi; prendiamo dunque la seconda limitazione nella forma (*). Da questa e dalla prima limitazione si ha:

$$2{,}3\cdot 1{,}4\le x\cdot(-y)\le 2{,}5\cdot 1{,}6$$

cioè:

$$2{,}3\cdot 1{,}4\le -xy\le 2{,}5\cdot 1{,}6$$

e, infine:

$$-2{,}5\cdot 1{,}6\le xy\le -2{,}3\cdot 1{,}4\ .$$

Per ottenere la quarta limitazione, ricordiamo che se a e b sono numeri positivi, la disuguaglianza $a \leq b$ equivale alla $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$. Ritorniamo dunque ancora alla (*); passando ai reciproci si ha: $\frac{1}{1,6} \leq \frac{1}{-y} \leq \frac{1}{1,4}$. Facendo ora intervenire la limitazione per la x, si ottiene:

$$\frac{2,3}{1,6} \leq -\frac{x}{y} \leq \frac{2,5}{1,4}$$

cioè, infine:

$$-\frac{2,5}{1,4} \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{2,3}{1,6}$$

Tema 2

Algebra elementare, equazioni, disequazioni

2.1 Quesiti di livello base

2.1.1 Sia

$$A = \frac{p^3 - q^3}{p - q}.$$

Calcolare il valore di A, quando $p = \frac{1}{2}$, $q = 1$.

2.1.2 Semplificare (se possibile) l'espressione

$$\frac{(a+b)^2 - c^2}{c - a - b}.$$

2.1.3 Risolvere l'equazione

$$(2x + 1)(3x - 2)(x + 4) = 0.$$

2.1.4 Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 0{,}3x + 0{,}12y = 0 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

2.1.5 Determinare l'insieme dei valori di x per i quali risulta

$$\frac{x + \sqrt{2}}{x + \sqrt{3}} \geq 0 \cdot$$

2.1.6 A partire dalla relazione

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

(con p, q, r non nulli) esprimere p in funzione di q e di r.

2.1.7 Semplificare: $(y^2 - x^2)(y^2 + x^2 - 1) - y^4 + x^4$.

2.1.8 Si sa che la somma di due numeri è 6 e che il loro prodotto è 8. Trovare i due numeri.

2.1.9 Si sa che la differenza di due numeri è 3 e che il loro prodotto è -2. Trovare i due numeri.

2.1.10 Tradurre la seguente frase del linguaggio corrente in una formula matematica: "Se la somma dei reciproci di due numeri positivi è 1, la somma dei due numeri è uguale al loro prodotto".

Stabilire quindi se l'enunciato è vero.

2.2 Quesiti che richiedono maggiore attenzione

2.2.1 Stabilire quali delle seguenti uguaglianze sono vere qualunque siano i numeri *a, b, c, d* (purché le espressioni abbiano senso) e giustificare le risposte:

$$\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}=\frac{a\cdot b}{c\cdot d} \qquad \frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d} \qquad \frac{a}{c}:\frac{b}{d}=\frac{a:b}{c:d}$$

$$(a+b):c=a:c+b:c \qquad a:(b+c)=a:b+a:c.$$

2.2.2 Scrivere un'equazione di terzo grado che abbia per soluzioni i numeri $-1, 4, \frac{11}{3}$.

2.2.3 Determinare i valori di x per i quali risulta

$$x^3+2>0.$$

2.2.4 Dati due numeri distinti a,b, determinare due numeri c,d in modo che sussista l'identità:

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{c}{x+a}+\frac{d}{x+b}$$

2.2.5 Trasformare (se possibile) le seguenti espressioni in somme di quadrati:

$$3x^2-2xy+2y^2 \qquad 3x^2-6xy+2y^2.$$

2.2.6 Eseguire la divisione del polinomio x^4 per il polinomio x^2+1 ed esprimere con un'uguaglianza il significato dell'operazione eseguita.

2.2.7 Dati due numeri reali a,b e sapendo che $0 < a \le b$, in che relazione stanno tra loro i numeri $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{a}$?

2.2.8 Determinare le soluzioni della seguente disequazione:

$$\frac{1}{x}+x>2$$

2.2.9 Dati due numeri a e b distinti, sia c la loro media aritmetica. Vale allora, ovviamente, l'uguaglianza:

(1) $a+b=2c$.

Da questa qualcuno ha dedotto successivamente le seguenti:

(2) $(a+b)(a-b)=2c\,(a-b)$

(3) $a^2-b^2=2ac-2bc$

(4) $a^2-2ac=b^2-2bc$

(5) $a^2-2ac+c^2=b^2-2bc+c^2$

(6) $(a-c)^2=(b-c)^2$

(7) $a-c=b-c$

(8) $a=b$.

La (8) contraddice l'ipotesi da cui siamo partiti, dunque almeno uno dei passaggi fatti è sbagliato. Quale o quali?

2.3 Risposte commentate

2.1.1 $A = \frac{7}{4}$ **.**

Nota. Il calcolo poteva essere effettuato mediante sostituzione diretta nell'espressione data, oppure osservando preliminarmente che l'espressione può essere semplificata in quanto $p^3 - q^3$ è divisibile per $p-q$. Nel caso specifico, i due procedimenti sono ugualmente semplici. In genere è più vantaggioso effettuare le sostituzioni solo dopo avere eseguito le semplificazioni (specie se i valori numerici da sostituire sono complicati).

2.1.2 $-(a+b+c)$.

2.1.3 Tenuto conto della legge di annullamento del prodotto, le soluzioni dell'equazione data si ottengono semplicemente risolvendo le tre equazioni di primo grado:

$$2x+1 = 0 \qquad 3x-2 = 0 \qquad x+4 = 0$$

quindi le soluzioni sono: $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -4$.

Nota. Chi, invece di ricorrere alla legge di annullamento del prodotto, avesse svolto i calcoli per "togliere le parentesi", avrebbe trasformato l'equazione originaria in un'altra (equivalente alla data, ma di forma diversa) di cui poi sarebbe stato difficile determinare le radici.

2.1.4 Il sistema ammette un'unica soluzione: $(x; y) = (0{,}2 ; -0{,}5)$.

2.1.5 Si tratta dell'unione di due intervalli:

$$\{x < -\sqrt{3}\} \quad \text{oppure} \quad \{x \geq -\sqrt{2}\}.$$

Nota. Sarebbe sbagliato usare il segno di disuguaglianza debole (ossia $\leq$) nel caso del primo intervallo e sarebbe sbagliato usare il segno di disuguaglianza forte (ossia >) nel caso del secondo intervallo.

Ancor più sbagliato sarebbe usare scritture del tipo

$$-\sqrt{2} \leq x < -\sqrt{3}$$

oppure:

$$\begin{cases} x < -\sqrt{3} \\ x \geq -\sqrt{2} \end{cases}$$

Cercate di capire perché tutte queste scritture non sono accettabili!

2.1.6

$$p = \frac{1}{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}} = \frac{qr}{q-r}$$

Nota. L'espressione trovata ha senso solo se $q \neq r$. D'altra parte, questa condizione era implicita già nella formulazione del quesito, poiché se fosse $q = r$ ne seguirebbe $\frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ e quindi, sostituendo nella relazione iniziale, $\frac{1}{p}=0$, relazione non soddisfatta da alcun valore di p.

2.1.7 Per non dover fare troppi calcoli conviene riscrivere l'espressione data nella forma $(y^2-x^2)(y^2+x^2-1)-(y^2-x^2)(y^2+x^2)$ da cui, raccogliendo il fattore comune (y^2-x^2) e semplificando, si ottiene x^2-y^2.

2.1.8 Detti p, q i due numeri, si tratta di risolvere il sistema:

$$\begin{cases} p+q=6 \\ p\cdot q=8 \end{cases}$$

La soluzione è data dai due numeri 2 e 4.

2.1.9 Ragionando come per il quesito precedente e risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} p-q=3 \\ p\cdot q=-2 \end{cases}$$

si trovano due soluzioni: la coppia di numeri 1 e -2 e la coppia di numeri 2 e -1.

Nota. I quesiti 2.1.8 e 2.1.9 sono simili. Tuttavia il primo ammette una sola soluzione, mentre il secondo ne ammette due. Per chi avesse la curiosità di capire il perché di questa apparente anomalia, ecco una possibile spiegazione. In entrambi i casi si tratta di risolvere un sistema di secondo grado. Ripercorriamo per sommi capi le tappe del procedimento risolutivo: nella prima equazione si esplicita una delle due variabili in funzione dell'altra, per esempio q in funzione di p, e si sostituisce l'espressione così trovata nella seconda equazione; con ciò si perviene ad un'equazione di secondo grado nella sola p, che dunque ha due soluzioni p_1, p_2 (le quali risultano reali e distinte in entrambi i quesiti). Sostituendo p_1 nella prima equazione si trova un certo valore q_1 con la proprietà che (p_1,q_1) è una soluzione del sistema. Analogamente, sostituendo p_2 nella prima equazione, si trova un certo valore q_2 con la proprietà che (p_2,q_2) è una soluzione del sistema.

Orbene, nel caso del sistema del quesito 2.1.8 le due coppie così trovate: $(p_1,q_1)=(2,4)$, $(p_2,q_2)=(4,2)$ coincidono (a meno dell'ordine) e quindi si usa dire che c'è una sola soluzione. Nel caso del sistema del quesito 2.1.9 invece, le due coppie: $(p_1,q_1)=(1,-2)$, $(p_2,q_2)=(2,-1)$ sono distinte. La ragione di fondo del diverso comportamento dei due sistemi deriva dal fatto che nel caso 2.1.8 i ruoli di p e q sono simmetrici e dunque interscambiabili (l'addizione e la moltiplicazione godono della proprietà commutativa) mentre nel caso 2.1.9 i due ruoli di p e q sono distinti (in quanto la sottrazione non gode della proprietà commutativa).

Si noti infine che, proprio grazie alla simmetria del sistema 2.1.8, esiste un metodo più rapido per trovarne la soluzione: basta ricordare che p e q sono le radici dell'equazione $x^2-(p+q)\,x+p\cdot q=0$.

2.1.10 Traduzione. Se a , b sono numeri reali positivi, da $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ segue: $a+b=ab$.

L'enunciato è vero: basta svolgere i calcoli.

Nota. L'ipotesi che i due numeri a,b siano positivi non viene sfruttata nei calcoli, quindi l'enunciato è vero più in generale, anche senza questa limitazione (vanno solo esclusi i valori $a=0$, $b=0$). Si noti però che, dei tre casi a priori possibili: numeri entrambi positivi, un numero positivo e l'altro negativo, numeri entrambi negativi, quest'ultimo non si può presentare. Infatti da $a < 0$, $b < 0$ segue che anche i rispettivi reciproci sono entrambi negativi; pertanto la somma di tali reciproci è ancora un numero negativo, e dunque non può essere 1.

* * *

2.2.1 Sono vere la prima, la terza e la quarta uguaglianza (conseguenza delle proprietà formali delle operazioni). Sono false la seconda e la quinta uguaglianza (basta dare un esempio, attribuendo opportuni valori numerici ad $a,b,\ c,d$, per es. $a = b = c = d = 1$).

Nota. E' importante riflettere sulla struttura delle domande in cui si articola questo quesito e sulla struttura delle rispettive risposte. Le domande contengono dei "quantificatori universali" espressi dalle parole "qualunque siano i numeri..." (una formulazione equivalente poteva essere: "per tutti i numeri..."). In situazioni di questo tipo, ossia quando si tratta di stabilire se un'affermazione "universale" è vera o falsa, per provarne la verità occorre dare una dimostrazione che contempli la totalità dei casi possibili, mentre per provarne la falsità basta esibire un esempio. Infatti un'affermazione si considera "falsa", quando la negazione dell'affermazione è "vera"; inoltre, la negazione di un'affermazione "universale": "Per ogni ... vale ..." è un'affermazione "esistenziale": "Esiste almeno un ... per il quale ... non vale".

2.2.2 Per la legge di annullamento del prodotto (vedi sopra, soluzione dell'esercizio 2.1.3) l'equazione cercata è:

$$(x+1)(x-4)\left(x-\frac{11}{3}\right)=0$$

Nota. Anche ogni altra equazione ottenuta moltiplicando entrambi i membri della precedente per un numero diverso da 0 soddisfa alle condizioni richieste, per es. $(x+1)(x-4)(3x-11) = 0$.

2.2.3 $x > -\sqrt[3]{2}$.

2.2.4 Riducendo allo stesso denominatore e uguagliando i coefficienti al numeratore, ci si riconduce al sistema:

$$\begin{cases} c+d=0 \\ bc+ad=1 \end{cases}$$

che, risolto nelle incognite c,d dà:

$$c=\frac{1}{b-a} \qquad d=\frac{1}{a-b}.$$

2.2.5 L'espressione $3x^2 - 2xy + 2y^2$ può essere scritta in un'infinità di modi come somma di quadrati. Per es.:

$$(x^2 - 2xy + y^2) + 2x^2 + y^2 = (x - y)^2 + (\sqrt{2}\,x)^2 + y^2.$$

Nota. E' altresì possibile trasformare la stessa espressione in somma di due soli quadrati. Basta ricorrere al classico procedimento noto come "completamento del quadrato". Si spezza l'espressione data in due componenti:

$$3x^2 - 2xy + 2y^2 = (3x^2 - 2xy + ky^2) + (2 - k)\,y^2$$

e si determina k in modo che il polinomio $3x^2 - 2xy + ky^2$ risulti un quadrato perfetto. Ciò accade per $k = 1/3$:

$$3x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^2 = (\sqrt{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}y)^2$$

Per $k = 1/3$ anche l'altra componente può essere scritta sotto forma di quadrato perfetto:

$$(2 - \frac{1}{3})y^2 = \frac{5}{3}y^2 = \left(\sqrt{\frac{5}{3}}y\right)^2$$

da cui la tesi.

L'espressione $3x^2 - 6xy + 2y^2$ non può essere scritta come somma di quadrati. Per provarlo, basta osservare che attribuendo opportuni valori alle variabili x, y l'espressione assume valori negativi, mentre una somma di quadrati deve essere sempre ≥ 0. Per es. si prenda $x = y = 1$.

2.2.6 Il quoziente della divisione del polinomio $A = x^4$ per il polinomio $B = x^2 + 1$ è $Q = x^2 - 1$ e il resto è $R = 1$. Questo fatto si esprime mediante l'uguaglianza $A = B \cdot Q + R$ che nel caso specifico diventa: $x^4 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) + 1$.

2.2.7 Da $0 < a \leq b$ segue $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} > 0$

2.2.8 La disequazione $\frac{1}{x} + x > 2$ è verificata per ogni x maggiore di 0 e diverso da 1.

L'insieme delle soluzioni può essere scritto anche nella forma

$$(0,1) \cup (1, \infty)$$

2.2.9 E' sbagliato il passaggio da (6) a (7). Infatti l'uguaglianza tra i quadrati di due numeri non implica l'uguaglianza tra i numeri stessi. Quindi da (6) si può dedurre solo che

$$a - c = b - c \qquad \text{oppure} \qquad a - c = -b + c$$

Tema 3

Insiemi, elementi di logica, calcolo combinatorio, relazioni e funzioni

3.1 Quesiti di livello base

3.1.1 Si considerino i seguenti enunciati: "*n* è un multiplo di 3 o è un numero pari, e inoltre è minore di 20"; "*n* è un numero pari minore di 20, oppure è multiplo di 3 e minore di 20" (*n* è un numero naturale). Interpretare con espressioni insiemistiche i due enunciati.

3.1.2 Illustrare e giustificare (con un controllo su diagrammi di Eulero-Venn) la formula insiemistica $(A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C)$.

3.1.3 Sia *p* l'affermazione "ogni numero naturale maggiore di 1 è somma di due numeri dispari". Esprimere l'affermazione "non *p*" (senza usare espressioni come "non è vero che ...").

Stabilire poi se *p* è vera oppure "non *p*" è vera.

3.1.4 Nell'insieme dei numeri naturali, come si può caratterizzare il sottoinsieme *S*={1,3,5,7,9}? Con altre parole: trovare una proprietà caratteristica di *S*, cioè una proprietà che sia vera per tutti e soli gli elementi di *S*.

3.1.5 Quanti sono i sottoinsiemi dell'insieme *A* = {1,2,3,4}?

3.1.6 Nello schema della Figura 1, tutte le frecce hanno il significato di "... è maggiore di ..."; c'è un circoletto vuoto: in questo scrivete un numero naturale che rispetti le frecce. Manca anche qualche freccia fra i numeri dello schema; tracciate le frecce che collegano i numeri scritti.

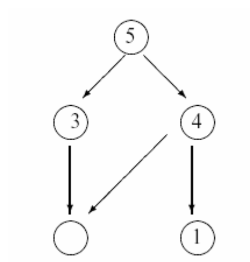


Figura 1

3.2 Quesiti che richiedono maggiore attenzione

3.2.1 Dati gli insiemi *A* = {1,2,3,4}, *B* = {a,b,c}. Tra le applicazioni possibili di *A* in *B,* ce ne sono di suriettive? di iniettive? di biiettive?

3.2.2 Nella Figura 2 sono segnati alcuni numeri e alcune frecce fra essi (questa volta tutte le frecce possibili sono state tracciate). Che cosa possono significare queste frecce?

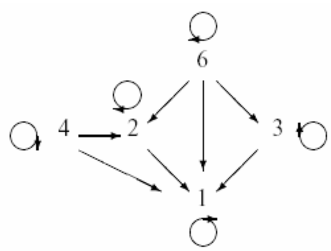


Figura 2

3.2.3 Nell'insieme delle rette del piano, fare un esempio di una relazione d'equivalenza.

3.2.4 In un'isola ogni abitante è un cavaliere (e allora dice sempre la verità) o un furfante (e allora mente sempre). Incontriamo due abitanti *A*, *B* che ci fanno queste dichiarazioni:

A: "Io sono un cavaliere"

B: "*A* è un furfante".

A è un cavaliere? e *B*? Si può rispondere a queste domande?

3.2.5 Esprimere senza usare il "non" la frase "Non è vero che Gigi è buono e attento".

3.2.6 L'insieme {A,C,N,O,R} è caratterizzato dalla proprietà di essere:

a) l'insieme delle prime 16 lettere, tolte alcune di esse

b) l'insieme delle lettere della parola *ANCONA*

c) l'insieme delle lettere della parola *ANCORA*

d) l'insieme delle lettere della parola *ANCORAGGIO*.

3.2.7 Siano *p, q* due proposizioni; supponiamo che da *p* si possa dedurre *q*. Che cosa altro si può certamente dire?

a) da (non *p*) si può dedurre (non *q*)

b) da (non *q*) si può dedurre (non *p*)

c) da *q* si può dedurre *p*

d) nessuna delle affermazioni precedenti.

Scrivere al posto di *p* e di *q* due proposizioni matematiche opportune in modo che dalla prima si possa dedurre la seconda. Quale chiamereste ipotesi? Quale chiamereste tesi?

3.3 Risposte commentate

3.1.1 Indichiamo con *A*, *B*, *C* rispettivamente, gli insiemi dei numeri pari, dei multipli di 3, dei numeri minori di 20: le espressioni cercate sono $(A \cup B) \cap C$ e $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

3.1.2 Basta osservare i due "diagrammi di Eulero-Venn" nella Figura 3. In quello di sinistra $A \cup B$ è rappresentato dalla regione tratteggiata verticalmente, *C* dalla regione tratteggiata orizzontalmente, e la zona quadrettata rappresenta $(A \cup B) \cap C$. Nel secondo, sono evidenziati $A \cap C$ con tratteggio verticale e $B \cap C$ con tratteggio orizzontale: la zona tratteggiata in un modo, nell'altro o in ambedue i modi rappresenta $(A \cap C) \cup (B \cap C)$. I risultati finali sono uguali. L'uguaglianza si esprime anche dicendo che "l'unione di insiemi è distributiva rispetto all'intersezione".

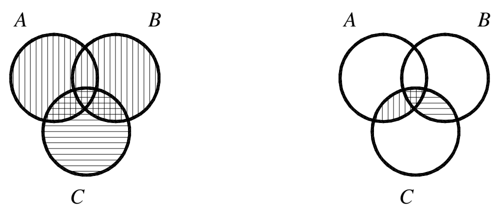


Figura 3

3.1.3 L'affermazione "non *p*" è "ci sono numeri naturali che non sono somma di due numeri dispari". Essa è vera, mentre *p* è falsa (un numero dispari non è somma di due numeri dispari).

3.1.4 Si tratta di trovare una proprietà numerica che sia vera per ogni elemento di *S*, e per nessun altro. Per esempio: *S* è l'insieme dei numeri dispari minori di 10 (osservate che c'è nascosta la congiunzione "*e*": "... è un numero dispari e inoltre è minore di 10"). Non sarebbe corretto rispondere "sono numeri dispari", perché vi sono numeri dispari che non compaiono in *S*.

3.1.5 C'è il sottoinsieme vuoto; poi 4 sottoinsiemi formati da un solo elemento; poi 6 formati da due elementi ({1,2},{1,3}, ...,{3,4}); 4 di tre elementi (ciascuno si ottiene eliminando uno dei quattro elementi); infine *A* stesso. In totale 1+4+6+4+1 = 16 sottoinsiemi.

3.1.6 In basso a sinistra manca un numero, minore di 3: può trattarsi di 0, di 1 o di 2. Prendiamo per esempio 2: occorre tracciare una freccia da 5 a 2 e a 1, da 4 a 3, da 2 a 1.

* * *

3.2.1 Vi sono varie applicazioni suriettive di *A* in *B*. Ne otteniamo una associando a 1,2,3,4 rispettivamente *a,b, c, c*. Non vi sono applicazioni iniettive, perché due elementi di *A* debbono avere lo stesso corrispondente. In particolare, non vi sono applicazioni biiettive di *A* in *B*.

3.2.2 Una possibile risposta è: "... è multiplo di ...".

3.2.3 Un esempio possibile è: "due rette *r, s* non hanno punti comuni o sono coincidenti".

Un altro possibile esempio è il seguente. Sia *P* un punto arbitrario del piano; due rette *r, s* sono equivalenti se passano entrambe per il punto *P* oppure se entrambe non lo contengono. Le rette del piano risultano in questo modo suddivise in due classi di equivalenza: le rette passanti per *P* (una classe) e tutte le altre (l'altra classe).

3.2.4 *A* e *B* sono certamente di tipo diverso, perché fanno affermazioni opposte. Non si può dire altro: *A* può essere un cavaliere, e *B* un furfante; oppure *A* ha mentito, e allora è un furfante, e *B* ha detto la verità, ed è un cavaliere.

3.2.5 Negare che Gigi abbia tutt'e due le qualità, vuol dire che gliene manca almeno una, cioè non è buono o non è attento. E' dunque corretta la risposta "Gigi è cattivo o disattento". Spesso si crede che la risposta giusta sia "Gigi è cattivo e disattento": ma non si può pretendere che Gigi abbia tutt'e due le 'qualità negative'.

3.2.6 Risposta giusta: c). La b) non va bene perché nella parola *ANCONA* manca la "R"; la parola *ANCORAGGIO* contiene tutte le lettere A, C, N, O, R, ma contiene anche "G" e "I". Quanto alla risposta a), è vero che l'insieme {A, C, N, O, R} si ottiene prendendo le prime 16 lettere e togliendone qualcuna, ma non si può dire che in questo modo si ottenga solo tale insieme, e quindi non si può dire che esso sia l'insieme così fatto (la domanda si poteva formulare anche dicendo "trovate una proprietà caratteristica dell'insieme {A, C, N, O, R}": quella espressa dalla risposta a) non si può considerare caratteristica per il nostro insieme, perché non viene precisato quali lettere si debbano togliere).

3.2.7 Risposta giusta: b). Infatti se si afferma che la tesi *q* è falsa, cioè che "non *q*" è vera, non può essere vera l'ipotesi *p* (altrimenti sarebbe vera anche *q*); quindi da "non *q*" segue "non *p*". Esempio: *p*: "Il quadrilatero *ABCD* è un rettangolo"; *q*: "Il quadrilatero *ABCD* si può inscrivere in una circonferenza". Osservate che a) non va bene, come si vede dall'esempio: se *ABCD* non è un rettangolo, non si può dire che non sia inscrivibile in una circonferenza. Anche c) non va bene, per lo stesso motivo.

Tema 4
Geometria

4.1 Quesiti di livello base

4.1.1 Dimostrare le seguenti proposizioni:

a) in ogni quadrilatero inscritto in una circonferenza la somma degli angoli opposti è un angolo piatto;

b) in ogni quadrilatero circoscritto ad una circonferenza la somma delle lunghezze di due lati opposti è uguale alla somma delle lunghezze degli altri due.

4.1.2 Dimostrare le seguenti proposizioni:

a) la somma degli angoli interni di un poligono convesso è uguale a tanti angoli piatti quanti sono i lati del poligono, meno due angoli piatti;

b) la somma degli angoli esterni di un poligono convesso è uguale a due angoli piatti.

4.1.3 Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali:

a) scrivere l'equazione della retta che passa per il punto $(2,-1)$ ed è perpendicolare alla retta $4x - 3y + 12 = 0$;

b) determinare la distanza del punto $(-3,2)$ dalla retta $4x - 3y + 12 = 0$;

c) scrivere l'equazione della retta (è una sola?) passante per il punto $(0,0)$ e tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 - 2x + y = 0$.

4.1.4 Due sfere hanno rispettivamente area S_1, S_2 e volume V_1, V_2. Conoscendo il rapporto $\frac{S_1}{S_2} = h$ (numero positivo) determinare il valore del rapporto $\frac{V_1}{V_2}$.

4.1.5 Sappiamo che l'intersezione di *due* piani distinti dello spazio può essere di due tipi: a) una retta comune ai due piani, b) l'insieme vuoto, quando i piani sono tra loro paralleli.

Si chiede di elencare analogamente tutti i possibili tipi di intersezione che si possono presentare con *tre* piani distinti dello spazio.

4.1.6 Date nello spazio due rette sghembe *r, s* quanti sono i piani che

a) contengono *r* e sono paralleli a *s*?

b) contengono *r* e sono perpendicolari a *s*?

Si osservi che la risposta alla seconda domanda esige una distinzione di casi.

4.2 Quesiti che richiedono maggiore attenzione

4.2.1 Si consideri la proposizione: "in un triangolo rettangolo la bisettrice dell'angolo retto e la mediana relativa al cateto maggiore sono perpendicolari". Dire se tale proposizione è vera o falsa. Se è vera dimostrarla; se è falsa riconoscere se esiste qualche caso particolare in cui essa è vera.

4.2.2 Date in un piano due rette perpendicolari, studiare il luogo dei punti del piano tali che la somma delle loro distanze da tali rette non superi 1.

4.2.3 Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y) si consideri la famiglia F di curve (luoghi geometrici), rappresentate, al variare del parametro reale a, dalle equazioni

$$a(x^2 + y^2 + x + y) + (x + y) = 0.$$

Riconoscere, al variare di a, la natura dei luoghi geometrici appartenenti alla famiglia F .

Nella famiglia F vi sono delle circonferenze; trovare il luogo dei loro centri.

Fissato un valore reale positivo r, esistono circonferenze di F di raggio r? quante?

Prima di rispondere a questo quesito enunciare con precisione cosa si intende con la espressione "equazione di una curva" oppure "equazione di un luogo geometrico".

4.2.4 Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y) si considerino i luoghi dei punti rappresentati dalle seguenti equazioni:

a) $x^2 + y^2 - 1 = 0$,

b) $x^2 + y^2 = 0$,

c) $x^2 + y^2 + 1 = 0$,

d) $x^2 + y^2 + 2xy = 0$,

e) $x^2 + y^2 + xy = 0$,

f) $x^2 - y^2 = 0$,

g) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$,

h) $(x^2 - 1)^2 + y^2 = 0$.

Dopo aver dato una definizione precisa di "equazione di un luogo di punti", riconoscere quale delle precedenti equazioni rappresenta:

i) nessun punto,

ii) un punto,

iii) due punti,

iv) una retta,

v) due rette,

vi) una circonferenza.

4.3 Risposte commentate

4.1.1 a) Sia $ABCD$ il quadrilatero inscritto in una circonferenza di centro O (Figura 4). Ricordiamo ora il noto teorema "ogni angolo alla circonferenza è la metà dell'angolo al centro che insiste sullo stesso arco".

Consideriamo quindi gli angoli $B\hat{A}D$ e $B\hat{C}D$ del quadrilatero: ciascuno di essi è la metà di uno dei due angoli al centro individuati dalle semirette OB e OD (l'uno convesso e l'altro concavo o, eventualmente, entrambi piatti).

Poiché la somma di questi due angoli al centro è in ogni caso un angolo giro, la somma $B\hat{A}D + B\hat{C}D$ risulta uguale ad un angolo piatto.

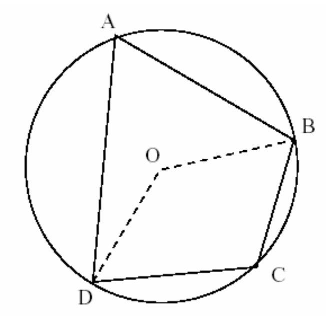


Figura 4

b) Sia *ABCD* il quadrilatero circoscritto ad una circonferenza di centro *O* e siano *H,K,L,M* rispettivamente i punti di contatto dei lati *AB*, *BC*, *CD*, *DA* (Figura 5).

Ricordando le proprietà delle tangenti ad una circonferenza condotte da un suo punto esterno, si hanno le seguenti relazioni tra le lunghezze dei segmenti:

$$AH = AM,\ BH = BK,\ CL = CK,\ DL = DM.$$

Da queste uguaglianze sommando membro a membro si ottiene:

$$AH + BH + CL + DL = AM + BK + CK + DM,$$

cioè

$$AB + CD = BC + AD.$$

Osservazione. Le proposizioni (a), (b) sono condizioni *necessarie* affinché un quadrilatero sia, rispettivamente inscritto oppure circoscritto ad una circonferenza. Queste due condizioni sono però anche *sufficienti*. Si invita il lettore interessato a darne una dimostrazione.

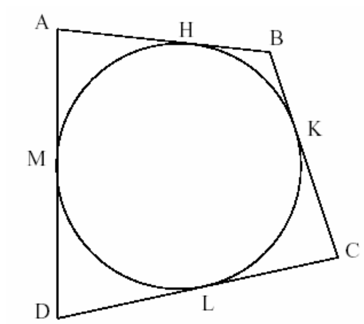


Figura 5

4.1.2 a) Sia *ABCDEF*.... un poligono convesso di *n* lati (e quindi *n* vertici) e *P* un suo punto interno (Figura 6). Congiungendo *P* successivamente con i vertici del poligono si ottengono tanti triangoli quanti sono i lati del poligono stesso, cioè *n*.

La somma degli angoli interni di tutti questi triangoli è dunque *n* angoli piatti; sottraendo da questa somma due angoli piatti (cioè l'angolo giro costituito dalla somma di tutti gli angoli di tali triangoli aventi vertice *P*) si ottiene la somma degli angoli interni del poligono che risulta quindi uguale a $(n-2)$ angoli piatti.

b) Come è noto in un poligono convesso si chiama *angolo esterno* in un generico vertice H l'angolo formato dalla semiretta di origine H, che contiene uno dei due lati del poligono uscenti da H, e la semiretta opposta a quella che contiene l'altro lato per H. Dunque in ogni vertice del poligono la somma dell'angolo interno e di un angolo esterno relativo a quel vertice è uguale ad un angolo piatto. Se il poligono ha n vertici, la somma di tutti i suoi angoli interni e dei relativi angoli esterni è dunque n angoli piatti. Poiché è noto (proposizione (a)) che la somma degli n angoli interni è uguale a $(n-2)$ angoli piatti, se ne deduce che la somma degli n angoli esterni è uguale a due angoli piatti.

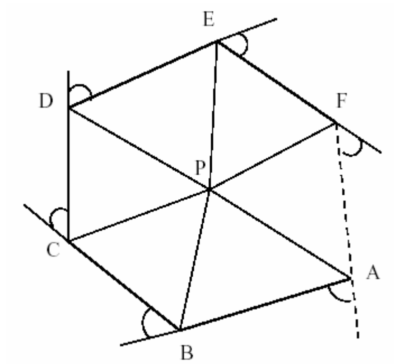


Figura 6

4.1.3

a) $3x + 4y - 2 = 0$;

b) la distanza è $\frac{6}{5}$;

c) La retta tangente è unica poiché il punto assegnato appartiene alla circonferenza; la sua equazione è $2x - y = 0$.

4.1.4 Osserviamo che l'area S e il volume V di una sfera di raggio r sono proporzionali rispettivamente a r^2 e r^3. Ne consegue $h = \frac{S_1}{S_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$ e quindi $\frac{V_1}{V_2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} = \sqrt{h^3}$.

4.1.5 Le possibili intersezioni di tre piani distinti dello spazio sono:

a) una retta r comune ai tre piani;

b) un solo punto P, quando i piani si incontrano a due a due secondo tre rette distinte *a,b, c* che passano per P;

c) l'insieme vuoto, quando i tre piani assumono una delle seguenti posizioni reciproche:

i) sono paralleli tra loro;

ii) si incontrano a due a due secondo tre rette distinte e parallele *a,b, c* (i tre piani formano cioè in questo caso un prisma illimitato di sezione triangolare e spigoli *a,b, c*);

iii) due dei tre piani sono paralleli e questi, a loro volta, incontrano il terzo piano secondo due rette *a,b* pure distinte e parallele.

4.1.6 a) Vi è esattamente un piano che contiene r ed è parallelo a s (cioè non ha punti in comune con s). Esso è il piano determinato da r e da una qualunque retta s' che è parallela a s e che passa per un punto di r.

b) Se le rette sghembe r e s sono ortogonali esiste esattamente un piano che contiene r ed è perpendicolare a s. Esso è il piano determinato dalla retta r e dalla retta t perpendicolare comune a r e s. Se r e s, sghembe, non sono tra loro ortogonali il piano richiesto non esiste.

* * *

4.2.1 La proposizione è falsa perché esiste almeno un contro-esempio; infatti in un triangolo rettangolo isoscele la bisettrice dell'angolo retto è perpendicolare all'ipotenusa. La proposizione è invece vera se e solo se uno dei cateti ha lunghezza doppia dell'altro.

4.2.2 (Risoluzione analitica). Si assumano le due rette perpendicolari come assi di un sistema di riferimento cartesiano (ortogonale monometrico). Il luogo cercato è costituito dai punti $P = (x, y)$ le cui coordinate soddisfano la disequazione $|x| + |y| \leq 1$.

Tale luogo consiste nei punti interni e nel contorno del quadrato di vertici $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$, $(-1,0)$.

4.2.3 La proposizione "la curva γ (oppure il "luogo geometrico γ") è rappresentata dalla equazione $f(x, y) = 0$" significa che γ è l'insieme di tutti e soli i punti le cui coordinate soddisfano l'equazione $f(x, y) = 0$. In questo senso può anche accadere che γ non contenga punti, oppure che sia composta da un solo punto.

Nella famiglia F si trova una retta (per $a = 0$) e un punto (il punto $(0,0)$ per $a = -1$). Per ogni altro valore di a i luoghi geometrici appartenenti alla famiglia F sono le circonferenze di equazione

$$x^2 + y^2 + (1+\frac{1}{a})x + (1+\frac{1}{a})y = 0$$

Al variare di a ($a \neq 0$, $a \neq -1$) esse hanno centro nel punto $\left(-\frac{a+1}{2a}, -\frac{a+1}{2a}\right)$ e raggio di lunghezza $r = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a+1}{a}\right|$. Il luogo dei centri di F è dunque contenuto nella retta di equazione $y = x$. Da tale retta va escluso il punto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ che non è centro di alcuna circonferenza della famiglia F (con abuso di linguaggio si potrebbe anche dire che la circonferenza di F avente centro nel punto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ corrisponde al valore "infinito" del parametro a).

Per ogni valore reale positivo r, le circonferenze di F che hanno raggio di lunghezza r, sono dunque quelle di centro $\left(r\frac{\sqrt{2}}{2}, r\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-r\frac{\sqrt{2}}{2}, -r\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Per ogni valore di $r \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ si trovano quindi in F due circonferenze distinte; per $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ si ha invece l'unica circonferenza di centro $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

4.2.4 Per il significato della espressione "equazione di un luogo di punti" si veda quanto già detto nella risposta al Quesito 4.2.3.

Le equazioni proposte rappresentano, rispettivamente, i seguenti luoghi:

a) una circonferenza (centro (0,0), raggio 1);

b) un punto ((0,0));

c) nessun punto;

d) una retta $(x + y = 0)$;

e) un punto ((0,0));

f) due rette ($y = x$, $y = -x$);

g) un punto $((-1, -1))$;

h) due punti ((1,0), $(-1,0)$).

Tema 5

Successioni e funzioni numeriche

5.1 Quesiti di livello base

5.1.1 Durante un breve viaggio in treno, si fanno le seguenti osservazioni.

Al segnale di partenza, il treno comincia a muoversi ed aumenta di velocità per circa tre minuti. Poi prosegue a velocità approssimativamente costante per circa cinque minuti. A questo punto inizia a rallentare e dopo due minuti giunge ad una stazione, dove rimane in sosta per un minuto.

Quindi il treno riparte, ed impiega questa volta quattro minuti per raggiungere una velocità costante, che risulta ora un po' più elevata che in precedenza. Viaggia così per sette minuti e infine compie una frenata, che richiede questa volta tre minuti, per arrestarsi nella stazione di destinazione.

Si chiede di rappresentare queste osservazioni per mezzo di un grafico, riportando in ascissa il tempo e in ordinata la velocità. Si tenga presente che la rappresentazione grafica di un evento non può in nessun caso essere effettuata con esattezza assoluta: essa sarà necessariamente approssimativa e sarà tanto più precisa quanto maggiore è la quantità e l'accuratezza dei dati a disposizione. Quello che viene richiesto in questo esercizio è semplicemente il disegno di un grafico che risulti coerente con le informazioni fornite.

5.1.2 Nella Figura 7 sono rappresentate delle relazioni tra numeri reali. Quali di queste possono essere interpretate come grafici di funzioni $y = f(x)$?

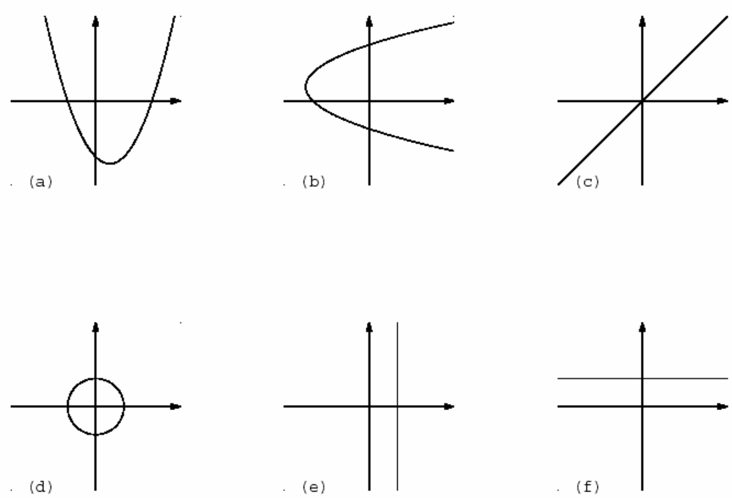


Figura 7

5.1.3 Nella Figura 8 sono disegnati i grafici di tre funzioni biettive e delle loro inverse. Sono inoltre disegnati i grafici di due funzioni non invertibili e il grafico di una funzione che coincide con la sua inversa. Individuare le due funzioni non invertibili, quella che coincide con la sua inversa e le coppie di funzioni l'una inversa dell'altra.

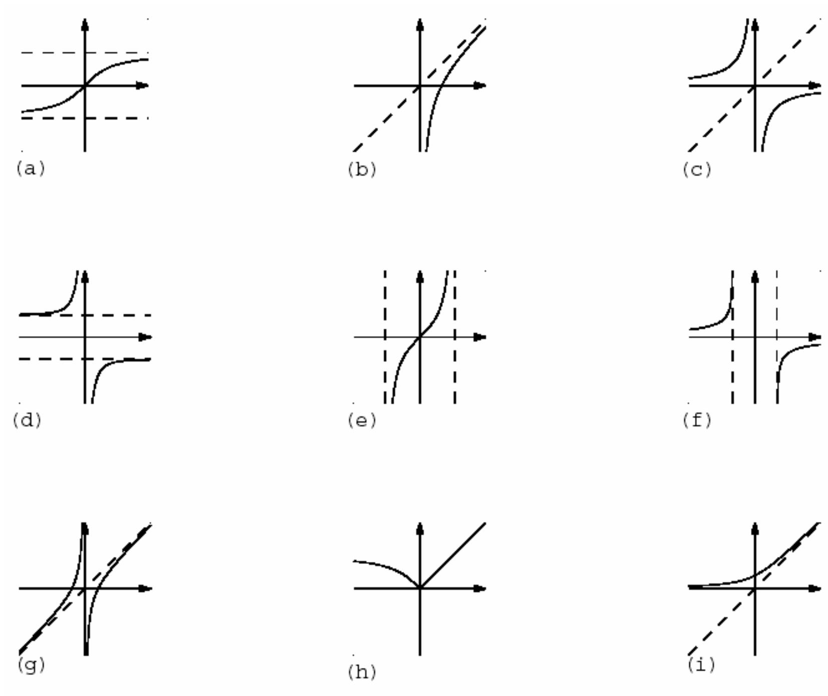


Figura 8

5.1.4 Nella Figura 9 è riportato il grafico di una funzione $y = f(x)$.

La Figura 10 rappresenta invece i grafici delle funzioni $f(|x|)$, $|f(x)|$, $|f(|x|)|$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x-1)$, $f(2x)$, $f(x/2)$, $-f(x)$.

Dire quale grafico corrisponde a quale funzione.

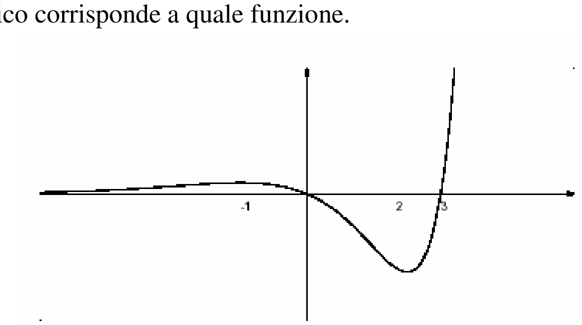


Figura 9

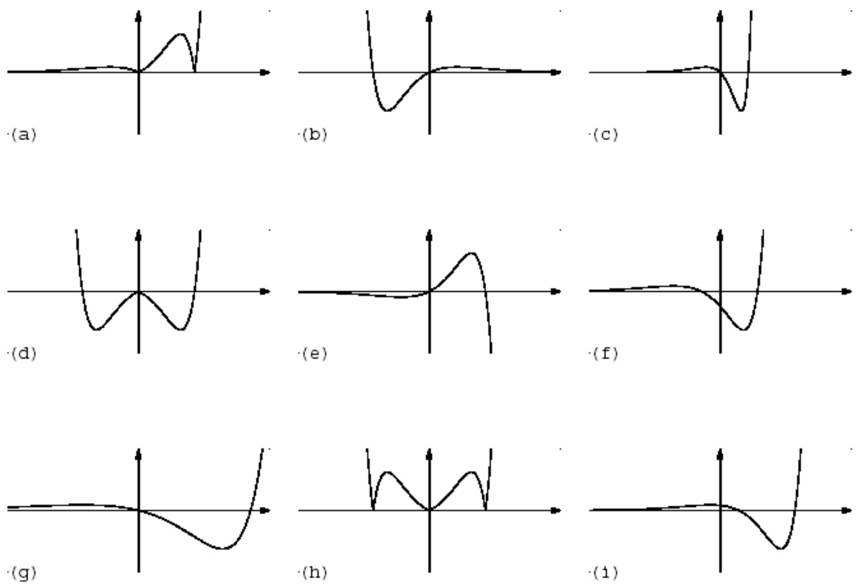


Figura 10

5.3 Risposte commentate

5.1.1 Sulla base delle informazioni fornite dal testo, il grafico della Figura 11 potrebbe essere già abbastanza rappresentativo.

Tuttavia, una rappresentazione un po' più fedele alla realtà potrebbe essere fornita dal grafico della Figura 12.

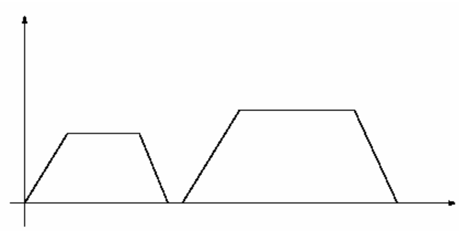


Figura 11

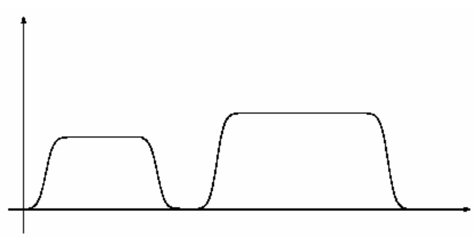


Figura 12

5.1.2 Nel disegno, abbiamo riportato, come d'uso, la variabile indipendente x in ascissa e la variabile dipendente y in ordinata. Una relazione può allora essere interpretata come grafico di una funzione quando le rette verticali incontrano il grafico in non più di un punto. Dunque (a), (c), (f) rappresentano funzioni, le altre no. Si potrebbe aggiungere che (b) ed (e) rappresentano funzioni se si fosse riportata la variabile indipendente x sull'asse delle ordinate, e la variabile dipendente y sull'asse delle ascisse; (d) invece non rappresenta il grafico di una funzione in nessun caso.

5.1.3 Una funzione è biettiva se e soltanto se per ogni valore della variabile dipendente y appartenente all'insieme immagine della funzione, esiste un unico valore della variabile indipendente x (appartenente al dominio di f), tale che $y = f(x)$.

Supponiamo di aver disegnato il grafico di una funzione biettiva $y = f(x)$ in un riferimento cartesiano, in cui la variabile indipendente x sia riportata, come d'uso, in ascissa e la variabile dipendente y in ordinata. Possiamo disegnare il grafico di una nuova funzione $y = g(x)$ sullo stesso riferimento cartesiano nel modo seguente. Si prende un numero a appartenente all'immagine di f e si risale a quell'unico valore b per cui $f(b) = a$. Quindi si pone $b = g(a)$. La funzione $y = g(x)$ si dice l'inversa di f. Per costruzione, il dominio di g coincide con l'immagine di f. Sottolineiamo che questa costruzione ha senso solo se f è biettiva. Per questa ragione, una funzione biettiva si dice anche invertibile. Osserviamo anche che se f è invertibile e g è la sua inversa, allora anche g è invertibile e l'inversa di g è f.

Sia $y = f(x)$ una funzione invertibile, e sia $y = g(x)$ la sua funzione inversa. In base alla definizione, se a appartiene al dominio di f si deve avere $a = f(g(a))$. In altre parole, se (a,b) è un punto appartenente al grafico di g, allora (b,a) deve appartenere al grafico di f, e viceversa. Da un punto di vista geometrico, due punti del piano cartesiano hanno le coordinate "scambiate" quando sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

In base a queste considerazioni, è allora facile vedere che le funzioni non invertibili sono la (g) e la (h). La funzione che coincide con la propria inversa è la (c) (il suo grafico è infatti simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante). Le coppie di funzioni l'una inversa dell'altra sono (a) ed (e), (b) e (i), (d) ed (f).

5.1.4 Nell'ordine, i grafici richiesti sono: (d), (a), (h), (b), (f), (i), (c), (g), (e).

II.3 Test di autovalutazione

1. Eseguendo la divisione con resto di 3437 per 225 si ottiene:
- A. 16 come quoziente e 163 come resto
- B. 32 come quoziente e 163 come resto
- C. 15 come quoziente e 163 come resto
- D. 16 come quoziente e 62 come resto
- E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

2. Il massimo comun divisore di 228 e 444 è:
- A. 34
- B. 75
- C. 12
- D. 6
- E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

3. Tutti i numeri interi positivi minori di 30 che sono multipli sia di 4 che di 6 sono:
- A. 4,6,8,12,16,18,20,24,28
- B. 8,16,24
- C. 24
- D. 4,6,8,16,18,20,28
- E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

4. Se il prodotto di sette numeri interi è negativo, allora si può essere sicuri che si ha:
- A. tutti i numeri sono negativi
- B. uno è negativo e gli altri sono positivi
- C. tre sono negativi e gli altri sono positivi
- D. cinque sono negativi e gli altri sono positivi
- E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

5. Se a è un numero negativo, allora il numero $-a+3$ è:
- A. sempre positivo
- B. positivo solo se $a < -3$
- C. positivo solo se $a > 3$
- D. positivo solo se $a > -3$
- E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

6. La soluzione dell'equazione $\log_2(\log_3 x) = 3$ è:
- A. $x = 3$
- B. $x = 3^4$
- C. $x = 3^6$
- D. $x = 3^8$
- E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

7. Il numero $\sqrt{0{,}9}$ è uguale a:

A. 0,3
B. 0,81
C. un numero compreso tra 0,81 e 0,9
D. un numero compreso tra 0,9 e 1
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

8. Posto K = 98075/12783456, risulta:

A. $10^{-2} < K < 10^{-1}$
B. $10^{-3} < K < 10^{-2}$
C. $10^{-4} < K < 10^{-3}$
D. $10^{-5} < K < 10^{-4}$
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

9. A quanti metri cubi corrispondono 700 cm^3?

A. $7 \cdot 10^4$ m^3
B. $7 \cdot 10^{-4}$ m^3
C. 0,7 m^3
D. 7 m^3
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

10. Dato $a > 0$, la disequazione $\sqrt{a} < a$ è verificata:

A. per ogni a
B. solo per $a > 1$
C. solo per $a < 1$
D. solo per $a > 1/2$
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

11. La doppia disequazione $4 < x^2 < 9$ è verificata:

A. solo per $\pm 2 < x < \pm 3$
B. solo per $2 < x < 3$
C. solo per $-2 < x < 3$
D. solo per $-3 < x < 3$
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

12. La disequazione

$$\frac{x^2 - 1}{x} > 0$$

è verificata:

A. per ogni $x \neq 0$
B. solo per $x > 1$
C. solo per $x < -1$
D. solo per $x < -1$ e per $x > 1$
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

13. Il costo del noleggio di una automobile è dato da una quota fissa pari a 50.000 lire, più 20.000 per ogni giorno di noleggio, più 100 lire per ogni chilometro percorso. Il cliente che noleggia l'automobile per tre giorni percorrendo 350 chilometri paga:

A. 145.000 Lire
B. 70.100 Lire
C. 113.500 Lire
D. 460.000 Lire
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

14. La frase "non è vero che tutti gli scolari sono diligenti" è equivalente alla frase:

A. "tutti gli scolari non sono diligenti"
B. "almeno uno scolaro non è diligente"
C. "nessuno scolaro è diligente"
D. "almeno uno scolaro è diligente"
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

15. L'equazione $\sin 2x = 2\sin x$ è verificata:

A. per ogni x
B. solo per $x = 2k\pi$ con k numero intero qualsiasi
C. solo per $x = k\pi$ con k numero intero qualsiasi
D. per nessun x
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

16. Un triangolo ABC ha gli angoli in B e in C di 30_ e due lati di 40 cm. La sua altezza relativa al lato BC è uguale a:

A. $10\sqrt{3}$ cm
B. 20 cm
C. $20\sqrt{3}/3$ cm
D. 80 cm
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

17. Sono dati in un piano due triangoli equilateri congruenti. Le isometrie del piano che portano il primo triangolo a sovrapporsi al secondo sono in numero di:

A. 1
B. 2
C. 3
D. 6
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

18. Dato un sistema di riferimento cartesiano (ortogonale monometrico) in un piano, le rette parallele alla retta $r : y = x$ e aventi distanza da r uguale a 1 hanno come equazioni:

A. $y = x + 1$ e $y = x - 1$
B. $y = x + \sqrt{2}/2$ e $y = x - \sqrt{2}/2$
C. $y = x + \sqrt{2}$ e $y = x - \sqrt{2}$
D. $y = x + 1/2$ e $y = x - 1/2$
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

19. Dato un sistema di riferimento cartesiano (ortogonale monometrico) in un piano, l'insieme dei punti $P = (1+t^2, 1+t^2)$, ottenuto al variare di t nei reali, è:

A. una parabola
B. una retta
C. una semiretta
D. una circonferenza
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

20. Dato un sistema di riferimento cartesiano (ortogonale monometrico) in un piano, l'insieme dei punti $P = (x, y)$ verificanti l'equazione $x^2 - 2y^2 = 0$ è:

A. l'origine del sistema di riferimento
B. una retta
C. una coppia di rette aventi un punto in comune
D. un'ellisse
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

21. Ogni diagonale di un cubo di lato 1 m misura:

A. $\sqrt{2}$ m
B. $\sqrt{3}$ m
C. $\sqrt[3]{3}$ m
D. $\sqrt[3]{2}$ m
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

22. Due piani α e β sono tra loro perpendicolari se e solo se:

A. una retta di α è perpendicolare ad una retta di β
B. ogni retta di α è perpendicolare ad ogni retta di β
C. la retta di intersezione dei due piani è perpendicolare a tutte le rette di α e β
D. ogni piano interseca i piani α e β in due rette tra loro perpendicolari
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

23. Il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti distinti è:

A. una retta
B. due sfere
C. una circonferenza
D. un piano
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

24. Dati due punti A e B distanti tra loro 5 cm, l'insieme dei punti C dello spazio tali che il triangolo ABC sia rettangolo in A ed abbia area uguale a 1 cm^2 è:

A. l'insieme vuoto
B. due punti
C. una circonferenza
D. una sfera
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

25. Nella Figura 13 sono rappresentati due grafici di funzioni.

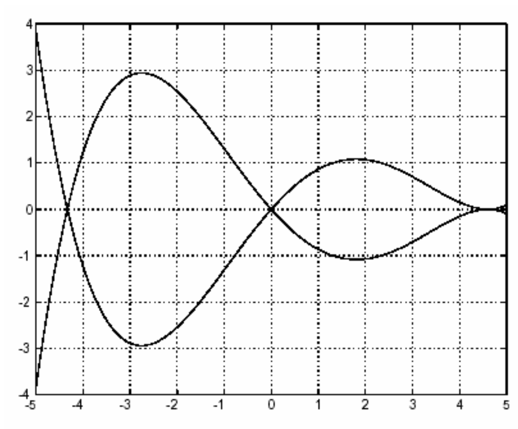


Figura 13

Uno di essi rappresenta il grafico di $y = f(x)$. L'altro rappresenta il grafico di:

A. $y = f(-x)$
B. $y = -f(x)$
C. $y = -f(-x)$
D. $y = f^{-1}(x)$
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

Tabella delle risposte esatte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
E	C	E	E	A	D	D	B	B	B	E	E	A	B	C	B	D	C	C	C	B	E	D	C	B

Soluzioni

1. Risposta esatta: E.
Possiamo fare i conti a mente. Abbiamo infatti: $225 \cdot 10 = 2250$ e $2250/2 = 1125$. Pertanto $225 \cdot 15 = 2250 + 1125 = 3375$. D'altronde $3437 - 3375 = 62$. Il quoziente è quindi 15 con resto 62.
Se fosse stato permesso l'uso della calcolatrice, si sarebbe potuto arrivare allo stesso risultato usando il seguente algoritmo. Dividendo 3375 per 225, si ottiene 15, ... Inoltre $225 \cdot 15 = 3375$. Infine $3437 - 3375 = 62$. Ma si sarebbe forse impiegato più tempo usando una calcolatrice che facendo i calcoli a mente.
Si sarebbe potuto evitare di fare i calcoli andando per esclusione.
Le risposte A, B e C si escludono perché il resto non può avere come ultima cifra 3 poiché un multiplo di 225 ha come ultima cifra o 0 o 5. Rimane la risposta D: il prodotto di 225 per 16 ha come ultima cifra 0 ($6\times5 = 30$); allora il resto deve avere come ultima cifra 7, e quindi non può essere 62.
Commento. Le divisioni con resto sono state inserite nel tema 1. La domanda proposta è analoga al primo quesito di livello base del tema 1. Il non aver dato la risposta esatta fa pertanto scattare un campanello d'allarme. Non si ha ancora una padronanza dell'argomento? La ristrettezza di tempo ha causato un errore nei calcoli? In ambedue i casi si consiglia di correre velocemente ai ripari.

2. Risposta esatta: C.
Fattorizziamo ambedue i numeri. Abbiamo $228 = 2^2 \cdot 3 \cdot 19$ e $444 = 2^2 \cdot 3 \cdot 37$. Il massimo comun divisore di 228 e 444 è quindi $2^2 \cdot 3 = 12$.
La fattorizzazione dei due numeri richiede tempo. Avremmo risparmiato tempo determinando i fattori del numero che sembra più facilmente fattorizzabile e controllando quali tra questi suoi fattori sono al tempo stesso fattori del secondo numero. Si nota infatti che si ha $444 = 4 \cdot 111 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 37$. In alternativa si può usare l'algoritmo di Euclide. Abbiamo $444 = 228 + 216$, inoltre $228 = 216 + 12$. Pertanto 12 è il massimo comun divisore di 444 e 228.
Commento. Notiamo anzitutto che sarebbe gravissimo dare come risposta A o B. I due numeri assegnati infatti sono entrambi divisibili per 2 e per 3. Dunque il loro massimo comun divisore è 6 o un suo multiplo.
La domanda proposta è analoga al quesito di livello base 1.1.4. Vale anche in questo caso il commento fatto per la prima domanda.

3. Risposta esatta: E.
I multipli di 4 e di 6 sono dati dai multipli di 12, minimo comune multiplo di 4 e 6. Quelli minori di 30 sono 12 e 24.
Commento. Nel tema 1 è inserito l'argomento massimo comun divisore e minimo comune multiplo. "Sapere" un concetto non significa solamente saperne dare la definizione. Significa anche sapere usare tale concetto. Chi ha dato la risposta A ha considerato l'insieme dei multipli di 4 e l'insieme dei multipli di 6. L'insieme dei multipli sia di 4 che di 6 è dato dall'intersezione dei due insiemi, non dall'unione.
Correre velocemente ai ripari se non si è data la risposta esatta.

4. Risposta esatta: E.
Se il prodotto di 7 numeri è negativo allora dalla regola dei segni segue che un numero dispari di essi sono negativi.
Commento. La risposta A è errata. Se infatti tutti i sette numeri sono negativi, allora il loro prodotto è negativo. Ma non è vero il viceversa. Discorso analogo vale per le risposte B,C,D. Molto probabilmente coloro che hanno dato la risposta sbagliata hanno invertito ipotesi con tesi (o, detto in altro modo, condizione necessaria con condizione sufficiente).

5. Risposta esatta: A.
L'opposto di un numero negativo è positivo, sommando ad esso un numero positivo si ottiene un numero positivo.
Commento. Una probabile causa di errore è il pensare che $-a$, poiché vi è il segno "meno", sia negativo. Errore imperdonabile. Non è assolutamente ammesso rispondere in modo errato a questa domanda.

6. Risposta esatta: D.
Da $\log_2(\log_3 x) = 3$ segue $\log_3 x = 2^3 = 8$ e quindi $x = 3^8$.
Commento. Per poter rispondere a questa domanda bisogna aver capito in profondità la definizione di logaritmo. Per capire in profondità una definizione non è sufficiente impararla a memoria. Chi non ha saputo dare la risposta esatta faccia ancora un po' di calcoli con i logaritmi.

7. Risposta esatta: D.
La risposta A è sbagliata. Infatti $0{,}3^2 = 0{,}09$. Errore imperdonabile aver scelto la risposta A. Anche la risposta B è sbagliata. Infatti $0{,}81^2 = 0{,}6561 < 0{,}9$. Proprio quest'ultima osservazione ci dice che si ha $0{,}81 < \sqrt{0{,}9}$. Abbiamo $0{,}9^2 = 0{,}81 < 0{,}9$. Pertanto, poiché ovviamente $\sqrt{0{,}9} < 1$, la risposta esatta è la D.
Commento. Per rispondere a questa domanda è necessario conoscere la definizione di radice quadrata e possedere un minimo di inventiva. Chi ha dato la risposta sbagliata deve al più presto
porre rimedio. In particolare deve rendersi conto che occorre capire meglio le definizioni (che magari già conosce) e capire anche il significato dei calcoli che esegue.

8. Risposta esatta: B.
Abbiamo $98075 = 9{,}8\ldots\cdot 10^4$ e $12783456 = 1{,}2\ldots\cdot 10^7$.
Poiché $1 < \dfrac{9{,}8\ldots}{1{,}2\ldots} < 10$, abbiamo $10^{-3} < K < 10^{-2}$.

Commento. Domanda non facile. Questo esercizio ha lo scopo di verificare la padronanza con le regole delle potenze. Sono regole importanti che devono essere ben interiorizzate in modo tale da poterle utilizzare nei più diversi contesti.

9. Risposta esatta: B.
Abbiamo 1 cm = 10^{-2} m. Pertanto 1 $cm^3 = 10^{-6}$ m^3. Segue:
700 $cm^3 = 7 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6}$ $m^3 = 7 \cdot 10^{-4}$ m^3.
Commento. Questo esercizio ha lo scopo di verificare la padronanza con i fattori di conversione tra unità di misura e con le regole delle potenze.

10. Risposta esatta: B.
Poiché $0 < \sqrt{a}$, dividendo per $\sqrt{a}$ ambo i membri della disequazione $\sqrt{a} < a$ otteniamo $1 < \sqrt{a}$. Segue $a > 1$.
Commento. Errore grave aver risposto A. Basti pensare $a = 1$. Si ha $\sqrt{a} = 1 = a$. Oppure si pensi $a = 1/4$. In questo caso si ha $\sqrt{a} = 1/2 > 1/4 = a$.
Chi non è stato in grado di dare la risposta esatta deve al più presto riguardarsi la definizione di radice quadrata con le relative implicazioni e le disequazioni. In effetti lo avrebbe dovuto già fare: sono argomenti inseriti alla fine del tema 2.

11. Risposta esatta: E.
Non dovrebbero esserci dubbi. La doppia disequazione è verificata per $-3 < x < -2$ e per $2 < x < 3$. L'affermazione precedente può essere equivocata perché l'uso della "e" nel linguaggio corrente è ambiguo. Non intendiamo infatti che le due condizioni siano verificate entrambe contemporaneamente. Per evitare ambiguità sarebbe preferibile scrivere la risposta nella forma $\{x : -3 < x < -2\} \cup \{x : 2 < x < 3\}$.
Commento. Chi ha dato una qualsiasi altra risposta deve riflettere con molta attenzione sul significato e sull'uso del formalismo relativo alle disequazioni. Chi poi ha dato la risposta A ha dato una risposta completamente priva di senso. Si può anche sbagliare ma non si può assolutamente scrivere qualcosa che non ha senso. Le risposte B, C e D hanno senso ma sono sbagliate. Il numero $x = -2{,}5$ non verifica le condizioni $2 < x < 3$ eppure si ha $4 < x^2 < 5$. Il numero $-2{,}5$ è quindi un controesempio alla risposta B. Il numero 0 è poi un controesempio sia alla risposta C che alla risposta D.

12. Risposta esatta: E.
Poiché $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ la disequazione è verificata ogni qual volta tra i fattori $x - 1$, $x + 1$ e $1/x$ ve ne sono o uno o tre positivi. Pertanto la disequazione è verificata ogni qual volta si ha $-1 < x < 0$ oppure ogni qual volta si ha $x > 1$.
Commento. Si tratta di una semplice disequazione con espressioni fratte. L'argomento è inserito nel Tema 2. Chi ha dato una risposta errata deve svolgere molti esercizi di questo tipo.

13. Risposta esatta: A.
Il costo del noleggio è uguale a $50.000 + 20.000 \cdot g + 100 \cdot k$ Lire, dove g è il numero di giorni e k è il numero di chilometri. Pertanto il cliente paga 145.000 Lire.
Commento. Domanda facile. Basta porre un po' d'attenzione.

14. Risposta esatta: B.
La risposta A, come la risposta C, è errata. La presenza di anche un solo scolaro non diligente implica che non tutti gli scolari sono diligenti.
Commento. Domanda molto facile.

15. Risposta esatta: C.
Sappiamo che si ha $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ per ogni valore di x.
L'equazione $\sin 2x = 2\sin x$ é equivalente all'equazione $2\sin x(\cos x - 1) = 0$.
Per la regola di annullamento del prodotto le soluzioni sono date dalle soluzioni dell'equazione $\sin x = 0$ (che sono $x = k\pi$ con k intero qualsiasi) e dalle soluzioni dell'equazione $\cos x = 1$ (che sono $x = 2k\pi$ con k intero qualsiasi).
Commento. Se non si ha una buona padronanza della trigonometria è facile sbagliare. Abbiamo inserito l'argomento "trigonometria" nel Tema 5. Anche chi non ha studiato la trigonometria a scuola deve assolutamente studiarsela per conto proprio. Nei corsi universitari la trigonometria viene utilizzata senza spiegarla: non vi saranno concessi errori su esercizi di questo tipo.

16. Risposta esatta: B.
Sappiamo che in un triangolo rettangolo, la misura di un cateto è uguale alla misura dell'ipotenusa per il seno dell'angolo ad esso opposto.
La misura in centimetri dell'altezza cercata è quindi uguale a $40 \cdot \sin 30° = 40/2$.
Commento. Semplice esercizio di trigonometria. Chi ha dato una risposta errata non ha padronanza dei rudimenti di trigonometria. Deve porre immediatamente rimedio.
Notiamo che avremmo potuto rispondere alla domanda anche senza fare uso della trigonometria con il seguente ragionamento. Poiché gli angoli in *B* e *C* sono di 30°, l'angolo in *A* è quindi di 120°. Sia *A'* il punto simmetrico di *A* rispetto alla retta passante per *B* e *C*. Il triangolo *AA'B* ha gli angoli di 60° e quindi è equilatero. Perciò l'altezza in *A* del triangolo *ABC* è metà di *AA'*, quindi di *AB*, cioè 20 cm.

17. Risposta esatta: D.
Siano *A,B,C* i vertici di un triangolo e *D,E,F* i vertici del secondo triangolo. Scegliamo l'immagine del vertice *A*. Abbiamo tre possibilità: una per ogni vertice del triangolo *DEF*. Dobbiamo ora decidere l'immagine del vertice *B*. Poiché i due triangoli equilateri sono congruenti, abbiamo due possibilità: una per ognuno dei due vertici che non sono immagine del vertice *A*. A questo punto l'immagine del vertice *C* è fissata. Abbiamo quindi 6 isometrie.
Ci si potrebbe chiedere di che tipo siano le 6 isometrie. Si può innanzitutto studiare il caso in cui i due triangoli coincidano. In questo caso abbiamo l'identità, le rotazioni intorno al centro (che coincide con l'incentro, il circocentro, il baricentro e l'ortocentro) di 120° e 240° e le simmetrie rispetto ai tre assi del triangolo. In totale dunque, sei isometrie.
Consideriamo ora il caso in cui i due triangoli non coincidano. Allora è noto che esiste esattamente una isometria che porta un triangolo assegnato in un altro ad esso congruente. Le sei isometrie cercate sono date dalle sei isometrie che portano il triangolo *ABC* in se stesso, composte con quell'unica isometria che porta il triangolo *ABC* nel triangolo *DEF*.
Commento. Domanda non facile. Provare ora a rispondere alla stessa domanda sostituendo i due triangoli congruenti equilateri con due triangoli congruenti isosceli ma non equilateri. Considerare infine il caso di due triangoli congruenti scaleni.

18. Risposta esatta: C.
Le rette parallele alla retta r hanno equazione $y = x + a$. Per calcolare il valore del parametro a scegliamo il punto $O = (0,0)$ della retta r, e imponiamo che la sua distanza dalla retta cercata sia uguale a 1. Otteniamo $|a|/\sqrt{2} = 1$. Pertanto le rette cercate hanno equazioni:
$y = x + \sqrt{2}$ e $y = x - \sqrt{2}$.
Commento. Domanda non difficile di geometria analitica. Notiamo che si può ottenere la risposta facendo la figura e notando che la diagonale di un quadrato di lato 1 è uguale a $\sqrt{2}$.

19. Risposta esatta: C.
Notiamo che i punti P hanno l'ascissa uguale all'ordinata. Inoltre l'ascissa (e quindi l'ordinata) sono maggiori o uguali a 1. I punti P sono quindi punti della semiretta appartenente alla retta $y = x$, avente origine nel punto (1,1) e contenente per esempio il punto (2,2). Viceversa, ogni punto di tale semiretta è punto del tipo $(1+t^2, 1+t^2)$. Infatti un punto generico di tale semiretta ha coordinate (a,a) con $a \geq 1$. Si ha quindi $a = 1+t^2$ ponendo $t = \sqrt{a-1}$.
Commento. Molte volte l'apparenza inganna: i termini $1+t^2$ possono trarre in inganno. Chi ha dato la risposta *A* si può consolare pensando che questa è la risposta di solito scelta dalla maggioranza degli studenti universitari del primo anno.

20. Risposta esatta: C.
Si ha $x^2 - 2y^2 = (x + \sqrt{2}\,y)\,(x - \sqrt{2}\,y)$. Dalla legge di annullamento del prodotto segue che l'insieme delle soluzioni dell'equazione è dato dall'insieme dei punti della retta $x + \sqrt{2}\,y = 0$ e dall'insieme dei punti della retta $x - \sqrt{2}\,y = 0$. Si tratta di due rette che si incontrano nel punto (0,0).
Commento. La domanda non è facile per coloro che, e sono la maggioranza, non sono abituati a maneggiare equazioni in più variabili. Un po' di attenzione permette però di risolvere problemi mai affrontati in precedenza. Nei corsi universitari vengono spesso assegnati problemi che, sebbene non trattati in precedenza, possono essere risolti con un po' di attenzione e inventiva.

21. Risposta esatta: B.
Si consideri una diagonale di una faccia del cubo. Essa misura $\sqrt{2}$. Si applichi quindi il teorema di Pitagora ad un triangolo rettangolo avente per cateti una diagonale di una faccia del cubo e un lato del cubo e per ipotenusa una diagonale del cubo.
Commento. Sebbene la geometria dello spazio sia spesso trascurata nelle scuole secondarie superiori, questa domanda non è molto difficile.

22. Risposta esatta: E.
Commento. Tra gli argomenti inseriti nel Tema 4 (geometria) vi è tra l'altro la perpendicolarità tra due piani. Consigliamo quindi di prendere un qualsiasi testo e andare a cercare la definizione di perpendicolarità tra due piani. Chi non ha saputo dare la risposta esatta deve rivedere con cura questo e gli altri argomenti di geometria dello spazio indicati nel Tema 4.
Quasi tutti i corsi universitari considerano noti questi argomenti.

23. Risposta esatta: D.
Il luogo dei punti equidistanti da due punti distinti *A* e *B* è dato dal piano passante per il punto medio di *A* e *B* perpendicolare alla retta passante per *A* e *B*.
Commento. Per rispondere a questa domanda è necessario avere una discreta visione dello spazio.

24. Risposta esatta: C.
Affinché i triangoli *ABC* siano rettangoli in *A*, i punti *C* devono appartenere al piano α passante per *A* perpendicolare alla retta *AB*. Affinché l'area del triangolo sia uguale a 1 cm^2 i punti devono appartenere alla circonferenza contenuta in α di centro *A* e raggio uguale a 2/5 cm.
Commento. Domanda assolutamente non facile. Per rispondere ad essa è necessario avere una visione dello spazio molto buona.

25. Risposta esatta: B.
I due grafici sono simmetrici rispetto all'asse delle *x*.
Commento. La domanda non è difficile. E' simile al Quesito 5.1.4.

CAPITOLO III

Le conoscenze di fisica

<u>La Fisica come strumento di interpretazione della natura</u>

Lo studio della fisica concorre, attraverso l'acquisizione delle metodologie e delle conoscenze specifiche della disciplina, alla formazione della personalità dello studente, favorendone lo sviluppo di una cultura armonica tale da consentire una comprensione critica e propositiva del presente e costituire una solida base per la costruzione di una professionalità polivalente e flessibile.

L'insegnamento della fisica, in stretto raccordo con le altre discipline scientifiche, si propone di perseguire vari obiettivi:

- comprensione dei procedimenti caratteristici dell'indagine scientifica, che si articolano in un continuo rapporto tra costruzione teorica e realizzazione degli esperimenti, e capacità di utilizzarli, conoscendo con concreta consapevolezza la particolare natura dei metodi della fisica;

- acquisizione di un corpo organico di contenuti e metodi finalizzati ad una adeguata interpretazione della natura;

- comprensione delle potenzialità e dei limiti delle conoscenze scientifiche;

- acquisizione di un linguaggio corretto e sintetico e della capacità di fornire e ricevere informazioni;

- capacità di analizzare e schematizzare situazioni reali e di affrontare problemi concreti anche in campi al di fuori dello stretto ambito disciplinare;

- abitudine al rispetto dei fatti, al vaglio e alla ricerca di un riscontro obiettivo delle proprie ipotesi interpretative;

- capacità di "leggere" la realtà tecnologica;

Sul piano della metodologia dell'insegnamento appaiono fondamentali tre momenti interdipendenti, ma non subordinati gerarchicamente o temporalmente:

- elaborazione teorica che, a partire dalla formulazione di alcune ipotesi o principi deve gradualmente portare l'allievo a comprendere come si possa interpretare e unificare un'ampia classe di fatti empirici e avanzare possibili previsioni;

- realizzazione di esperimenti da parte del docente e degli allievi singolarmente o in gruppo, secondo un'attività di laboratorio variamente gestita (riprove, riscoperte, misure) e caratterizzata da una continua ed intensa mutua fertilizzazione tra teoria e pratica, con strumentazione semplice e talvolta raffinata e con gli allievi sempre attivamente impegnati sia nel seguire le esperienze realizzate dall'insegnante, sia nel realizzarle direttamente, sia nell'elaborare le relazioni sull'attività di laboratorio;

- applicazione dei contenuti acquisiti attraverso esercizi e problemi che non devono essere intesi come un'automatica applicazione di formule, ma come un'analisi critica del particolare fenomeno studiato, e come uno strumento idoneo ad educare gli allievi a giustificare logicamente le varie fasi del processo di risoluzione.

III.1. Contenuti e abilità

CONTENUTI	ABILITA’
Concetti Base	Conoscere le grandezze fisiche fondamentali. Avere confidenza con il calcolo dimensionale a scopo predittivo, conoscere le lunghezze tipiche del mondo che ci circonda, avere idea degli ordini di grandezza e della notazione scientifica. Avere dimestichezza con scale lineari e scale logaritmiche.
Il Metodo Sperimentale	Conoscere il procedimento di misura e la precisione associata, il valore vero, la stima, i tipi di errore, l’accuratezza e la precisione, le cifre significative e l’arrotondamento. Comprendere la propagazione degli errori, la distribuzione dei dati su un intervallo, la rappresentazione mediante istogrammi con media e varianza, l’interpretazione statistica della misura e la distribuzione normale o gaussiana.
La Fisca Newtoniana	Conoscenza di grandezze scalari e vettoriali, del concetto di punto materiale, della legge oraria, del concetto intuitivo di velocità e di accelerazione. Saper interpretare la seconda legge di Newton e il rapporto causa-effetto, il principio di azione e reazione.
Moti nei casi semplici	Conoscere il concetto di forza costante e l'importanza delle condizioni iniziali, dei moti rettilinei e parabolici, della legge gravitazionale, del moto circolare, dell’accelerazione centripeta e del moto armonico.
Energia	Conoscere il concetto di energia e di lavoro di una forza, la definizione di energia cinetica e di forze conservative. Avere dimestichezza con il principio di conservazione dell'energia meccanica e il fenomeno dell’attrito.

Grandezze dinamiche	Conoscenza della nozione di corpo rigido, momento di una forza rispetto a un polo, momento angolare e sua conservazione, statica del corpo rigido.
Termodinamica	Conoscenza dei concetti di temperatura e calore. Gas Perfetto: Equazione di stato e teoria cinetica dei gas, principio di equivalenza di Joule e calorimetria. Capacità termica e calore specifico. Primo e secondo principio della termodinamica, entropia.
Fluidi	Conoscenza di densità e peso specifico, pressione nei fluidi, principio di Pascal e principio di Archimede.
Elettromagnetismo	Conoscenza di carica elettrica, legge di Coulomb, campo elettrostatico, conduzione nei solidi, corrente elettrica e legge di Ohm.

III.2. Temi svolti

Tema 1

Unità di misura e dimensioni delle grandezze fisiche

1.1 Quesiti di livello base

1.1.1 Convertire 15*m/s* in *Km/h*

1.1.2 La densità dell'aria è 1Kg/m^3: quanto vale in g/cm^3 ?

1.1.3 Quale delle seguenti misure è la più lunga:
(a) 104 *cm*.
(b) 104 *mm*.
(c) 106 μm.
(d) 109 *nm*.

1.1.4 Quale massa è minima:
(a) 105 μg.
(b) 102 *g*.
(c) 1 *kg*.
(d) 103 *mg*.

1.1.5 Che spessore s di pneumatico si consuma percorrendo 1 *Km* in auto, sapendo che i pneumatici si cambiano ogni T=60000 *Km* e che il loro spessore totale è D=1 *cm* ?

1.1.6 Una libbra ha una massa equivalente pari esattamente a 453.59237 *g*. Come si esprime questo valore con quattro cifre significative?

1.1.7 Trovare una grandezza che abbia le dimensioni di un'energia diviso un volume e scriverne l'equazione dimensionale

1.1.8 Un virus è lungo circa 10^{-8} *m*. Tale lunghezza può esprimersi come:
(a) 1 *cm*.
(b) 1 *mm*.
(c) 10 μm.
(d) 10 *nm*.
(e) 1 *Å*.

1.2 Quesiti che richiedono maggiore attenzione

1.2.1 Se si conta 1 centesimo di euro al secondo, quanti anni occorrono per contare 500.000,00 Euro ?

1.2.2 Verificare che le seguenti equazioni siano dimensionalmente omogenee:

a) $E = \frac{1}{2}mv^2$ (*E* = energia, *m* = massa, *v* = velocità)

b) $L = ma$ (*L* = lavoro, *m* = massa, *a* = accelerazione)

1.2.3 Misurando con un cronometro il tempo **t** della caduta di un grave, sono stati ottenuti i seguenti valori: t_i= 0.247 s; 0.245 s; 0.243 s; 0.245 s; 0.244 s; 0.244 s; 0.245 s; 0.242 s; 0.242 s; 0.246 s, *i*=1,…10. Calcolare: a) il valor medio **<t>**, b) lo scarto quadratico medio **σ**, c) l'errore assoluto $\varepsilon_a = \sigma / \sqrt{N}$ **.** Indicare il numero n di cifre significative per i risultati ottenuti.

1.3 Risposte commentate

1.1.1 Per convertire 15 *m/s* in *Km/h* occorre, innanzitutto, tener presente che 1*m*=10^{-3}*Km* e 1*s*=1*h*/3600, pertanto:

$$15\frac{m}{s} = 15 \cdot \frac{Km}{1000}\left(\frac{3600}{h}\right) = 54\frac{Km}{h}\ .$$

1.1.2 Per convertire 1*Kg/m³* in *g/cm³* occorre tener presente che 1*Kg*=1000*g* e che 1*m*=100*cm*, quindi 1m^3=$10^6 cm^3$.

$$1\frac{Kg}{m^3} = \frac{10^3 g}{10^6 cm^3} = 10^{-3} g/cm^3\ .$$

1.1.3 La misura più lunga è pari a 104 *cm*.

1.1.4 La massa minima è105 μg.

1.1.5 Per ogni Km, lo spessore consumato è s=D/T≈0.2 *μm/Km*.

1.1.6 Con 4 cifre significative la massa equivalente ad una libbra è pari 453.6*g*.

1.1.7 Una grandezza che ha le dimensioni di un'energia diviso un volume è la densità di energia. L'equazione dimensionale si scrive nella forma seguente:

$$\left[\frac{E}{V}\right] = \left[\frac{ml^2}{t^2 l^3}\right] = \left[\frac{m}{t^2 l}\right]$$

1.1.8 10^{-8} m si può esprimere come 10*nm*.

***

1.2.1 L'esercizio ha lo scopo di far prendere dimestichezza con la conversione tra unità di misura.
Occorrono 100 *s* per contare 1 Euro e quindi 500.000,00 Euro si contano in 5 x 10^7 *s*.
Dal momento che 1 anno corrisponde a circa 3.15 x 10^7 *s*, sono necessari 1.59 anni per contare 500.000,00 Euro, cioè circa 1 anno 7 mesi e 2,4 giorni.

1.2.2 L'esercizio evidenzia la procedura del calcolo dimensionale per le equazioni in Fisica.
a)

$$[E] = [F \cdot s] = \left[\frac{ml}{t^2} l\right] = \left[\frac{ml^2}{t^2}\right]$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right] = \left[m\frac{l^2}{t^2}\right] = \left[\frac{ml^2}{t^2}\right]$$

La prima equazione è dimensionalmente corretta (F = forza, s = spostamento).

b)

$$[L] = [F \cdot s] = \left[\frac{ml}{t^2} l\right] = \left[\frac{ml^2}{t^2}\right]$$

$$[ma] = \left[m\frac{l}{t^2}\right] = \left[\frac{ml}{t^2}\right]$$

La seconda equazione non è dimensionalmente corretta, infatti la relazione giusta è, in realtà, $F=ma$.

1.2.3 L'esercizio ha lo scopo di richiamare i concetti fondamentali di misura ed errori statistici.

Il valor medio è dato da

$\langle t\rangle = \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{N} = 0.2443\ s$ (n = cifre significative = 4)

essendo N=10.

Lo scarto quadratico medio si calcola dalla relazione

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}\sigma_i^2}{N}}$ =0.00170 s (n = cifre significative = 3)

dove $\sigma_i = t_i - \langle t\rangle$.

Il tempo impiegato dal grave a cadere si può scrivere, quindi, considerando tre cifre significative

$t = 0.244 \pm 0.002\ s$. (n = cifre significative = 3)

Si riporta, infine, l'errore assoluto

$\varepsilon_a = \sigma/\sqrt{N} \doteq 0.00054\ s$ (n = cifre significative = 2).

Tema 2
Cinematica

2.1 Quesiti di livello base

2.1.1 Trascurando l'attrito dell'aria, una palla lanciata verticalmente impiega più tempo a salire o a scendere?

2.1.2 un corpo lanciato verso l'*alto*, dopo 4 secondi si trova 10 metri sopra il punto di partenza. Qual è la sua velocità media? Qual è la sua velocità media se viene lanciato verso il *basso* e dopo 4 secondi si trova 10 *m* sotto il punto di partenza? Si trascuri l'attrito dell'aria.

2.1.3 Un signore esce di casa alle 8, si dirige verso il giornalaio (lontano 150 metri) e impiega 3 minuti per arrivarci: si ferma 1 minuto. Poi riprende a camminare verso un bar, che dista mezzo chilometro nella stessa direzione, dove arriva dopo 8 minuti. Disegnare su un grafico la posizione dell'uomo in funzione del tempo, supponendo costanti le velocità di percorrenza nei vari tratti. Calcolare la velocità media totale.

2.2 Quesiti che richiedono maggiore attenzione

2.2.1 Due auto A e B partono insieme da Napoli: l'auto A percorre la distanza Roma-Napoli (195*Km*) in 1h e 30 minuti: calcolare la sua velocità media. L'auto B percorre la stessa distanza a 150 *Km/h*, ma si ferma 15 minuti in un area di servizio. Chi arriva prima? Qual'è la velocità media dell'auto B?

2.2.2 Un'auto percorre un tratto di strada 120*Km* a 60*Km/h*, poi entra in autostrada accelera e percorre altri 120*Km* a 120*Km/h*: calcolare la sua velocità media. Esprimere il risultato anche in *m/s*.

2.2.3 Un'auto A parte da Napoli diretta a Milano e viaggia ad una velocità media di 100*Km/h*. Dopo 30 minuti dallo stesso punto parte una seconda auto B: a che velocità media deve viaggiare l'auto B per raggiungere l'auto A dopo 300K*m*? A quale invece per raggiungerla in due ore? Risolvere l'esercizio anche utilizzando il sistema internazionale (distanze in metri, tempi in secondi, velocità in metri/secondo)

2.2.4 Un motorino viaggia a 36*Km/h* e frena con una accelerazione costante di $-2m/s^2$. Calcolare il tempo che impiega a fermarsi e lo spazio di frenata. Quanto vale la velocità dopo un tempo $t_1 = 2s$? e dopo un tempo $t_2=10s$?

2.2.5 Una macchina è ferma ad semaforo rosso: quando scatta il verde la macchina viene sorpassata da un motorino che viaggia a velocità costante di 10*m/s* e la macchina comincia a muoversi con un'accelerazione di $2m/s^2$. Dopo quanto tempo lal macchina supera il motorino? Che velocità istantanea ha la macchina quando supera il motorino? Quanto spazio ha percorso? Qual è stata la sua velocità media (dal momento della partenza al momento in cui raggiunge il motorino)?

2.2.6 Un sasso viene lanciato in verticale verso l'alto alla velocità di 10*m/s*. A causa dell'accelerazione di gravità ($g=9.8m/s^2$) inverte il moto e cade al suolo. Calcolare:
a) Dopo quanto tempo il sasso inverte il moto (comincia a cadere verso il basso)
b) l'altezza massima raggiunta

2.2.7 Un proiettile viene sparato da un cannone che forma un angolo di 30 gradi rispetto all'orizzontale , con velocità $v_0 = 300 m/s$.

Determinare:

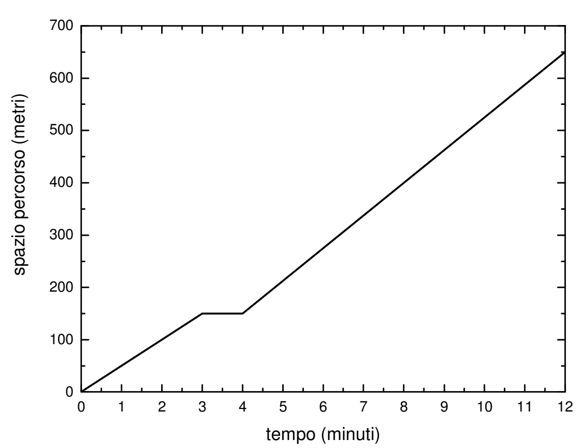
a) il tempo impiegato a raggiungere il punto più alto della traiettoria
b) le coordinate del punto più alto
c) Il tempo impiegato a cadere al suolo
d) la distanza dal cannone a cui il proiettile colpisce il suolo (gittata)

2.3 Risposte commentate

2.1.1 Trascurando l'attrito dell'aria, una palla lanciata verticalmente impiega esattamente lo stesso tempo a salire oppure a scendere.

2.1.2 La velocità media è definita come lo spazio percorso diviso il tempo impiegato a percorrerlo e quindi v = Spazio / Tempo=$10m/4s=2.5m/s$ è la velocità media del corpo lanciato verso l'alto. Per quanto riguarda il corpo lasciato cadere verso il basso, la velocità media è uguale in valore assoluto. Tuttavia, volendo essere più rigorosi, dovremmo considerare che la velocità è un vettore e, pertanto, se si sceglie un sistema di riferimento unidimensionale rivolto verso l'alto, la velocità del corpo che cade in basso è espressa da un numero negativo (v=-$2.5m/s$), in quanto il verso del vettore è opposto a quello del sistema di riferimento.

2.1.3 Grafico della posizione dell'uomo in funzione del tempo, supponendo costanti le velocità di percorrenza nei vari tratti:



La velocità media dell'uomo è data dalla relazione:

$$V = \frac{(150+500)m}{12\min} = \frac{650m}{12 \cdot 60s} \cong 0.9 m/s$$

***

2.2.1 L'esercizio ha lo scopo di far prendere dimestichezza con il concetto di velocità media e con i tempi di percorrenza. Moto rettilineo uniforme.

La velocità media è definita come lo spazio percorso diviso il tempo impiegato a percorrerlo e quindi v = Spazio / Tempo =195Km/1.5h = 130Km/h sarà la velocità media dell'auto A.
Dalla stessa definizione di velocità si ricava Tempo = Spazio / Velocità e quindi per l'auto B, T=195Km/150Km/h = 1.3ore = 78 minuti. A questo tempo va aggiunto il tempo di sosta di 15 minuti per ottenere il tempo totale dell'auto B, pari a 93 minuti, cioè 1h e 33 minuti (1.55 ore). Di conseguenza arriva prima l'auto A. La velocità media dell'auto B è v = Spazio / Tempo =195Km/1.55h $\approx$ 126Km/h.

2.2.2 L'esercizio ha lo scopo di far prendere dimestichezza con il concetto di velocità media, la sua differenza con la media delle velocità e la conversione delle unità di misura. Moto rettilineo uniforme.
La velocità media è definita come lo spazio percorso diviso il tempo impiegato a percorrerlo e quindi v = Spazio / Tempo.
In questo caso lo spazio percorso è la somma dei due spazi s_1 e s_2 entrambi di 100Km.
Il tempo sarà la somma dei due tempi che ricavano dalla formula Tempo = Spazio / Velocità e quindi t_1 = 120Km/60Km/h = 2h e t_2 = 120Km/120Km/h = 1h.
La velocità media sarà $v = (s_1 + s_2)/(t_1 + t_2)$ = 240Km /3h = 80Km/h, che è minore della media delle velocità che si calcola $v = (v_1 + v_2)/2$ = 90Km/h
Per esprimere il risultato in metri/secondo bisogna ricordare che 1Km = 1000 m e 1h=60minuti=3600secondi. Quindi 80Km/h equivalgono a 80x(1000m/3600s) $\approx$ 22.2m/s.

2.2.3 L'esercizio ha lo scopo di approfondire il concetto di velocità media, la sua differenza con la media delle velocità, e introdurre i moti relativi e il concetto di sincronizzazione temporale. Moto rettilineo uniforme.
L'auto A percorre i 300Km in 3ore . La seconda auto deve percorrere la stessa distanza in un tempo di inferiore di 30 minuti, quindi in 2.5 ore. La sua velocità media sarà quindi v = Spazio / Tempo =300Km/2.5h = 120Km/h.
Per raggiungerla in 2 ore dobbiamo prima sapere quanto spazio ha percorso l'auto A in 2.5 ore (è partita mezz'ora prima dell'auto B) Spazio percorso dall'auto A = Velocità · Tempo = 100Km/h · 2.5h =250Km. Lo stesso spazio deve essere percorso dall'auto B in un tempo di due ore e quindi la velocità media dell'auto B deve essere V = Spazio / Tempo =250Km/2h = 125Km/h.

2.2.4 L'esercizio ha lo scopo di introdurre l'accelerazione, come variazione della velocità nel tempo, e il concetto di omogeneità delle grandezze fisiche. Moto rettilineo uniformemente accelerato.
Innanzitutto bisogna convertire i Km/h in m/s per avere unità di misura omogenee:
$v_1 = 36Km/h = 36 \cdot (1000m/3600s) = 10m/s$.
Quando il motorino si ferma la sua velocità è nulla (v_2 = 0) e quindi essendo l'accelerazione costante si ha $a = (v_2-v_1)/T$ da cui $T=-v_1/a = (-10m/s)/(-2m/s^2) = 5s$
Analogamente si può partire dall'equazione della velocità in un moto rettilineo uniformemente accelerato $v= v = v_0 +at$, si impone che la velocità di annulli,
v = 0, e si ottiene $at=-v_0$ e quindi $t=- v_0/a = 5s$. Nel primo caso T è l'intervallo di tempo in cui il motorino passa dalla velocità v_1 a v_2 , mentre nel secondo caso t è il

tempo calcolato a partire da un istante iniziale, che è stato scelto per convenienza come l'istante in cui il motorino comincia a frenare.
Lo spazio di frenata può essere calcolato dall'equazione $x = v_0t + (1/2)at^2$ da cui
$x = 10m/s \cdot 5s - (1/2)\, 2m/s^2 \cdot (5s)^2 = 50m - 25m = 25m$
Per calcolare le velocità è conveniente utilizzare l'equazione $v = v_0 + at$ e sostituire a t i tempi richiesti, $v = 10m/s - 2m/s^2 \cdot (2s) = 10m/s - 4m/s = 6m/s$ (notare che in fisica si sommano sempre e solo grandezze omogenee, in questo caso velocità che si misurano in *m/s*, non si possono sommare grandezze con unità di misura diverse)

2.2.5 L'esercizio ha lo scopo di far prendere dimestichezza con il concetto di accelerazione e con i moti relativi. Moto rettilineo uniformemente accelerato**.**
Il motorino si muove seguendo la legge oraria del moto rettilineo uniforme $x_m = x_0 + v_0t$, mentre la macchina si muove secondo la legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato
$x_a = x_0 + v_0t + (1/2)at^2$
Fissando l'istante t=0 nel momento in cui scatta il verde e prendendo l'origine dell'asse del x nel punto in cui si trova il semaforo abbiamo :
per il motorino $x_m = v_0t$
per l'auto $x_a = (1/2)at^2$
Per incontrarsi devono avere la stessa posizione allo stesso istante. Imponendo che abbiano la stessa posizione $x_m = x_a$ si ha $v_0t = (1/2)at^2$ da cui $t = 2v_0/a = 2(10m/s)/(2m/s^2) = 10s$.
La velocità istantanea si calcola usando la legge $v = v_0 + at$ con v_0=0 (l'auto parte da ferma) e quindi $v = 2m/s^2 \cdot 10s = 20m/s$
Lo spazio percorso si può calcolare usando una qualunque delle due leggi orarie, in quanto i due mezzi quando si incontrano (in questo caso) avranno percorso lo stesso spazio.
Utilizzando la seconda abbiamo $x_m = (1/2)at^2 = (1/2) \cdot (2m/s^2) \cdot (10s)^2 = 100m$
La velocità media dell'auto deve essere uguale alla velocità del motorino, in quanto hanno percorso spazi uguali in tempi uguali e infatti $v = 100m / 10s = 10m/s$.

2.2.6 L'esercizio ha lo scopo di far prendere dimestichezza con i moti sottoposti all'accelerazione di gravità. Moto rettilineo uniformemente accelerato.
a) quando il sasso inverte il moto la sua velocità cambia segno e quindi passa per lo zero. Il tempo a cui questo succede può essere trovato prendendo come sistema di riferimento un sistema con lo zero al suolo e l'asse y con il verso positivo diretto verso l'alto e ricordando che $v = v_0 - gt$ con v_0= velocità iniziale =10*m/s. I*mponendo che la velocità v sia nulla, si ha $0 = v_0 - gt$ da cui $t = v_0/g$ e quindi il tempo a cui raggiunge il massimo è
$t = (10m/s)/(9.8m/s^2) \approx 1.02s$
b) l'altezza massima di trova dalla legge oraria $x = x_0 + v_0t - (1/2)gt^2$ con t =1,02*s:*
$x = (10m/s) \cdot 1.02s - (1/2) \cdot (9.8m/s^2) \cdot (1.02s)^2 \approx 5.1m$

2.2.7 L'esercizio ha lo scopo di introdurre il concetto di moto in due dimensioni. Moto del proiettile.
Le equazioni del moto del proiettile lungo gli assi x e y sono:

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$x = x_0 + v_{0x}t$$

dove

$$v_{0x} = v_0 \cos\vartheta \approx 260 m/s$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\vartheta = 150 m/s$$

sono le componenti della velocità iniziale lungo x e y rispettivamente. Le coordinate iniziali sono $x_0=y_0=0$, poiché il proiettile è sparato dal suolo ($y_0=0$) e si sceglie l'origine dell'asse x coincidente con la posizione iniziale del proiettile.
L'altezza massima si ottiene imponendo che la componente verticale della velocità di annulli:

$$v_y = v_{0y} - gt = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_{\max} = \frac{v_{0y}}{g} \approx 15s$$

da cui si ottiene

$$y_{\max} = y(t_{\max}) = \frac{v_{oy}^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_{oy}^2}{g} \approx 1125 \text{ m}$$

La gittata si calcola ricavando l'istante temporale t_G in cui l'ordinata si annulla e sostituendo tale valore nell'equazione per x.

$$y(t_G) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_G = \frac{2v_{0y}}{g} \approx 30\text{s}$$

(la soluzione nulla è banale, poiché corrisponde all'istante iniziale, e pertanto si scarta).
Sostituendo t_G nell'equazione per x si ricava la gittata $x_G = v_{0x}t_G \approx 7800m$.

Tema 3
Dinamica

3.1 Quesiti di livello base

3.1.1 Una palla lanciata verticalmente arriva più in alto in presenza o in assenza di aria?

3.1.2 Si osserva nella fascia degli asteroidi un corpo che si muove su un'orbita circolare attorno al sole di raggio pari a 3 unità astronomiche (UA=distanza media sole-terra). Il periodo è dell'ordine di a) un terzo di anno, b) un anno, c) 3 anni, d) 5 anni?

3.1.3 Se l'accelerazione di gravità lunare vale approssimativamente 1/6 di quella terrestre, allora un astronauta che sulla Luna subisce una forza-peso di 100*N*, sulla Terra subirà una forza-peso di circa: a) 600 *N*, b) 100 *N*, c) 17 *N*;
Quanto vale la massa dell'astronauta sulla Terra? E sulla Luna?

3.1.4 Se un treno, che viaggia a velocità costante su una traiettoria rettilinea, frena improvvisamente, che succede ai passeggeri al suo interno?

a) vengono spinti all'indietro rispetto al moto di avanzamento del treno;

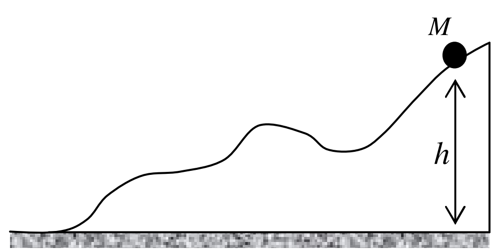
b) vengono spinti in avanti;

c) non subiscono alcuno spostamento.

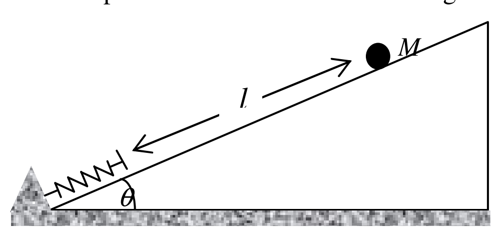
Sai spiegare perché i viaggiatori non sentono alcuna spinta quando il treno viaggia di moto rettilineo uniforme?

3.2 Quesiti che richiedono maggiore attenzione

3.2.1 Una piccola biglia si trova sul percorso mostrato in figura, ad un altezza h=1m dal suolo. Trascurando l'attrito, calcolare la velocità con cui raggiunge il suolo nei due casi:
a) la biglia parte da ferma
b) la biglia viene lanciata con una velocità iniziale di 2*m/s*.



3.2.2 Una piccola biglia di massa M = 10g si trova su un piano inclinato che forma un angolo θ con l'orizzontale, ad una distanza l=2m dall'estremità di una piccola molla (non compressa) di costante elastica k=200*N/m*. Trascurando l'attrito tra il corpo e il piano inclinato calcolare:
a) la velocità della biglia quando tocca la molla.
b) la massima compressione della molla.



3.2.3 Uno studente di massa 65 *kg* si trova su un ascensore che sale verso l'alto con un' accelerazione di 10 m/s^2. Quanto vale il modulo della forza totale che agisce sullo studente?

3.3 Risposte commentate

3.1.1 Una palla lanciata verticalmente, in presenza di aria, viene rallentata dall'attrito dell'aria e quindi si ferma prima. Pertanto, a parità di spinta iniziale, una palla lanciata verticalmente arriva più in alto in assenza di aria.

3.1.2 La terza legge di Keplero mette in relazione il periodo di rotazione di un corpo celeste intorno al sole (T) con la distanza del corpo dal sole (raggio R). In particolare, detti T_1=1anno il periodo di rotazione della terra ed R_1=1UA la distanza terra-sole, sussiste la relazione:

$\left(\frac{T}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{R}{R_1}\right)^3$ da cui si ricava $T = T_1\sqrt{\left(\frac{R}{R_1}\right)^3} = 1\sqrt{\left(\frac{3}{1}\right)^3} \cong 5.2$ anni.

Il periodo di rotazione di un corpo che si muove nella fascia degli asteroidi suddetta è dell'ordine di 5 anni .

3.1.3 Sulla Terra l'accelerazione di gravità risulta 6 volte maggiore di quella sulla Luna, pertanto, essendo la massa un invariante, l'astronauta subirà una forza-peso di 6 (100*N*)=600*N*. La massa è uguale su Terra e Luna e vale m=60 *kg* circa.

3.1.4 I viaggiatori vengono spinti in avanti, in quanto si trovano nel sistema di riferimento del treno, che non è più inerziale quando questo decelera. Dal punto di vista di un osservatore che si trovi a terra (sistema inerziale), i passeggeri, non essendo soggetti a forze reali, proseguono il loro moto rettilineo uniforme in avanti. Quando il treno viaggia di moto rettilineo uniforme, i viaggiatori non sentono alcuna spinta perché il treno è, in questo caso, un sistema inerziale.

***

3.2.1 L'esercizio ha lo scopo di applicare il principio di conservazione dell'energia in presenza della forza gravitazionale.
In assenza di forze dissipative, l'energia totale del sistema si conserva, pertanto si può eguagliare l'energia totale iniziale (biglia ad altezza h) a quella finale (biglia al suolo). L'energia totale ha due componenti, l'energia cinetica $E_c = \frac{1}{2}Mv^2$, dipendente dalla velocità v della biglia e l'energia potenziale U, che dipende dalla posizione. Quindi si può scrivere il teorema di conservazione dell'energia nella forma:

$E_c^{in} + E_p^{in} = E_c^{fin} + E_p^{fin}$ (*)

dove l'energia potenziale è di tipo gravitazionale ($E_p=Mgh$), essendo la forza peso l'unica forza esterna agente sulla biglia (g è l'accelerazione di gravità, pari a 9.8m/s^2).

Possiamo quindi scrivere :

$$\frac{1}{2}Mv_{in}^2 + Mgh_{in} = \frac{1}{2}Mv_{fin}^2 + Mgh_{fin}.$$

Nello stato iniziale la biglia si trova ad altezza $h_{in}=h$, mentre lo stato finale corrisponde alla biglia che ha raggiunto il suolo, quindi $h_{fin}=0$.

a) Se la biglia parte da ferma $v_{in}=0$, pertanto l'equazione (*) si riduce a

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_{fin}^2 \text{ da cui } v_{fin} = \sqrt{2gh} \approx 4.4 m/s .$$

b) Se la biglia parte con velocità $v_{in}=2m/s$, l'equazione (*) diventa

$$\frac{1}{2}Mv_{in}^2 + Mgh = \frac{1}{2}Mv_{fin}^2$$

da cui

$$v_{fin} = \sqrt{v_{in}^2 + 2gh} \approx 4.9 m/s .$$

3.2.2 L'esercizio ha lo scopo di applicare il principio di conservazione dell'energia in presenza di forze elastiche e gravitazionali.
Poiché la molla è piccola, possiamo trascurare la variazione di energia potenziale gravitazionale dovuta alla sua compressione, così come le sue dimensioni rispetto alla distanza l.
Inizialmente il corpo si trova ad un'altezza $h=l \sin\theta$.. L'energia cinetica iniziale è nulla, mentre l'energia potenziale, dovuta al campo gravitazionale, è data da $E_p^{in} = Mgl \sin\theta$. Consideriamo nulla l'energia potenziale allorché il corpo entra in contatto con la molla. In tale istante l'unico contributo all'energia totale è dato dall'energia cinetica. Per la conservazione dell'energia meccanica ($E_c^{in} + E_p^{in} = E_c^{fin} + E_p^{fin}$):

$$½ \mathrm{M}v_{\mathrm{fin}}^2 = \mathrm{Mgl} \sin\theta \Rightarrow v_{\mathrm{fin}}=(2\mathrm{gl} \sin\theta)^{½} = 4.4\ m/s$$

Per calcolare la massima compressione A della molla si applica nuovamente la conservazione dell'energia meccanica. Trascurando la variazione di energia potenziale gravitazionale dovuta alla compressione, l'energia potenziale finale elastica è $E_p^{fin} = ½\, kA^2$, mentre l'energia cinetica finale è nulla. Quindi

$$½\, kA^2 = Mgl \sin\theta \Rightarrow A = (2Mgl \sin\theta/k)^{½} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.01 \cdot 9.8 \cdot 2 \cdot 0.5}{200}} \approx 3.1\ cm.$$

3.2.3 Se l'ascensore si muove di moto uniformemente accelerato, lo studente si trova in un sistema di riferimento non inerziale. Scelgo per descrivere le equazioni del moto del corpo il sistema di riferimento inerziale del suolo. La risultante delle forze applicate al corpo è dovuta al suo peso ed alla reazione della bilancia *N:* $\sum F_y = N - mg = ma$, poiché l'ascensore sale con accelerazione a parallela all'asse y, mentre g è diretta in verso opposto rispetto a y. Quindi la bilancia indicherà un peso $N = m (g + a) = 65(10+9.8) = 1287N$.

Tema 4

Termodinamica

4.1 Quesiti di livello base

4.1.1 Un recipiente contiene 50 *g* di acqua alla temperatura di 25°*C*: si aggiungono 20 *g* di acqua alla temperatura di 90°*C*: quale sarà la temperatura all'equilibrio?

4.1.2 Un lavoratore produce lavoro utile al giorno di 10^4 *J* ed assume una quantità giornaliera di cibo pari a 4 *Kcal*. Quanto vale in percentuale, il rapporto fra la quantità di cibo assunta e il lavoro prodotto?

4.2 Quesiti che richiedono maggiore attenzione

4.2.1 Il corpo umano in condizioni normali ha una temperatura di 37°*C*. A quanto corrisponde in gradi Farhrenheit?

4.2.2 Determinare il volume occupato da m = 10 g di ossigeno (peso molecolare *M* = 32 *g*/mole) alla pressione di 1 *atm* e alla temperatura di 480 *K*.

4.3 Risposte commentate

4.1.1 La temperatura all'equilibrio sarà

$$T = \frac{50g \cdot 25°C + 20g \cdot 90°C}{70g} \cong 43.6°C$$

4.1.2 Considerando che 1*cal*=4.186*J*, il lavoratore assume giornalmente 4000 *cal*(4.186*J*/*cal*)=16744*J*. Il rapporto tra la quantità di cibo assunta e il lavoro prodotto è pari a 16744/10000=167%.

***

4.2.1 L'esercizio è utile per acquisire dimestichezza con le scale di temperatura.
La relazione tra la due scale di temperatura citate è : $T(°F)=9/5T(°C)+32$, pertanto $T=98.6°F$.

4.2.2 L'esercizio è utile per acquisire dimestichezza con le grandezze termodinamiche che descrivono un gas perfetto.
Una mole di ossigeno pesa 32*g* quindi 10*g* di ossigeno corrispondono a

$$n = \frac{10g}{32g} \approx 0.3 \text{ moli}$$

In equilibrio, nell'ipotesi che l'ossigeno sia sufficientemente rarefatto e possa quindi descriversi come un gas perfetto, l'equazione di stato $pV = nRT$ permette di mettere in relazione i suoi parametri termodinamici. Il volume che la quantità data di ossigeno occupa è:

$$V = \frac{nRT}{P} \approx 0.0125\ m^3 = 12.5 \text{ litri}$$

Tema 5
Elettromagnetismo

5.1 Quesiti di livello base

5.1.1 Due cariche si scambiano la forza F quando la loro distanza è r. Quali valori deve ordinatamente assumere r se si vuole che la forza risulti rispettivamente $F/2$, $F/3$, , F/n?

5.1.2 Calcolare la resistenza equivalente di due resistenze R_1=20 $k\Omega$ ed R_2=10 $k\Omega$ collegate
a) in serie
b) in parallelo
c) Quanto vale la corrente I che attraversa la resistenza R_1=20 $k\Omega$ se applichiamo ai suoi capi una differenza di potenziale V=10 V.

5.2 Quesiti che richiedono maggiore attenzione

5.2.1 Due sfere metalliche di diverso raggio sono elettricamente cariche e collegate mediante un filo metallico. In condizioni di equilibrio elettrostatico, quale delle seguenti affermazioni è vera:
(a) Sia la carica elettrica che il potenziale sono uguali su entrambe le sfere.
(b) La carica elettrica è uguale su entrambe le sfere, mentre il potenziale elettrico è maggiore sulla sfera più grande.
(c) La carica elettrica è maggiore sulla sfera più grande, mentre il potenziale elettrico è uguale su entrambe le sfere.
(d) La carica elettrica è maggiore sulla sfera più piccola, mentre il potenziale elettrico è uguale su entrambe le sfere.

5.2.2 Nell'atomo di idrogeno l'elettrone e il protone distano circa $r = 5 \cdot 10^{-11} m$. La carica dell'elettrone è $Q_e = -1.6 \cdot 10^{-19} C$, quella del protone è $Q_p = 1.6 \cdot 10^{-19} C$. Con quale forza elettrostatica si attraggono le due particelle? La massa dell'elettrone è $M_e = 9.1 \cdot 10^{-31} Kg$, mentre la massa del protone è $M_p = 1.7 \cdot 10^{-27} Kg$, calcolare la forza di attrazione gravitazionale. Calcolare il rapporto tra la forza gravitazionale e quella elettrostatica tra il protone e l'elettrone. (Si ricordi che la costante gravitazionale vale $G = 6.7 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2}$, mentre la costante dielettrica del vuoto vale $\varepsilon_0 = 8.8 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$).

5.3 Risposte commentate

5.1.1 L'esercizio ha lo scopo di far prendere dimestichezza con l'andamento della forza elettrostatica tra due cariche elettriche in funzione della loro distanza.
La forza elettrostatica dipende dall'inverso del quadrato della distanza ($F_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_e Q_p}{r^2}$), quindi se due cariche si scambiano la forza F quando la loro distanza è r, valgono le seguenti corrispondenze:

Forza scambiata $F_2=F/2$ $\longrightarrow$ distanza $r_2 = r\sqrt{2}$

Forza scambiata $F_3=F/3$ $\longrightarrow$ distanza $r_3 = r\sqrt{3}$

Forza scambiata $F_4=F/4$ $\longrightarrow$ distanza $r_4 = 2r$

....

Forza scambiata $F_n=F/n$ $\longrightarrow$ distanza $r_n = r\sqrt{n}$

5.1.2 L'esercizio ha lo scopo di introdurre il concetto resistenza equivalente in un circuito elettrico ed applicare la legge di Ohm.
a) Date due resistenze R_1 ed R_2 collegate in serie, la resistenza equivalente si calcola mediante la relazione $R_{eq}^s = R_1 + R_2$. Nel caso specifico $R_{eq}^s = 30K\Omega$.
b) Date due resistenze R_1 ed R_2 collegate in parallelo, la resistenza equivalente si calcola mediante la relazione $\frac{1}{R_{eq}^p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Nel nostro esempio $\frac{1}{R_{eq}^p} = \frac{1}{20} + \frac{1}{10}$, da cui si ricava $R_{eq}^p \approx 6.7K\Omega$.
c) Per calcolare la corrente I applichiamo la legge di Ohm $V=IR$.
Il valore di corrente richiesto si ottiene mediante la relazione $I = \frac{V}{R_1} = \frac{10V}{20K\Omega} = \frac{10V}{20\cdot 10^3\,\Omega} = 0.5mA$.

***

5.2.1 L'esercizio ha lo scopo di richiamare i concetti di carica elettrica e potenziale elettrico.
Poiché le due sfere sono collegate da un filo metallico, il potenziale elettrico è uguale su entrambe le sfere. Invece, la carica elettrica è maggiore sulla sfera più grande che ha una capacità maggiore.

5.2.2 L'esercizio ha lo scopo di comparare l'ordine di grandezza della forza elettrostatica con quello della forza di attrazione gravitazionale.
La forza elettrostatica con cui interagiscono le due cariche è diretta lungo la congiungente tra le due particelle ed ha un valore assoluto dato dalla relazione

$$F_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_e Q_p}{r^2}$$

dove r è la distanza tra le due cariche.
Sostituendo i valori numerici otteniamo

$F_{el} = \frac{1}{4 \cdot 3.14 \cdot 8.8 \cdot 10^{-12}} \frac{-1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{\left(5 \cdot 10^{-11}\right)^2} \approx -9.26 \cdot 10^{-8} N$. Si noti che il segno meno nel risultato finale esprime il fatto che la forza è attrattiva, dal momento che le due cariche sono di segno opposto.

La forza gravitazionale con cui si attraggono le due masse è diretta lungo la congiungente tra le due particelle ed ha un valore assoluto dato dalla relazione

$$F_g = -G \frac{M_e M_p}{r^2}$$

dove r è la distanza tra le due cariche.

Per l'elettrone ed il protone in questione la forza di attrazione gravitazionale vale

$$F_g = -6.7 \cdot 10^{-11} \frac{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 1.7 \cdot 10^{-27}}{\left(5 \cdot 10^{-11}\right)^2} \approx -4.15 \cdot 10^{-47} N .$$

Il rapporto tra le due forze è un numero (quindi una grandezza adimensionale) dato da

$$\frac{F_g}{F_{el}} = \frac{-4.15 \cdot 10^{-47} N}{-9.26 \cdot 10^{-8} N} \approx 4.5 \cdot 10^{-40} .$$

Si noti che il valore ottenuto è estremamente piccolo e pertanto la forza di attrazione gravitazionale può essere trascurata rispetto alla forza elettrostatica, essendo di ben 40 ordini di grandezza inferiore.

III.3 Test di autovalutazione

1. Cosa enuncia la prima legge di Newton?

A. Due corpi si attirano l'uno verso l'altro in maniera proporzionale alla loro massa
B. La prima legge del moto, nota anche come primo principio della dinamica, afferma che in assenza di forze agenti, un corpo conserva il proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme
C. Due corpi si attraggono in maniera proporzionale al loro volume

2. Cosa si intende per LAVORO?

A. Il lavoro è un sistema adimensionale per giudicare gli sforzi applicati in un sistema chiuso
B. Il lavoro è una grandezza scalare, definita come il prodotto tra la forza applica ad un corpo e lo spostamento che esso subisce lungo la retta di applicazione della forza
C. Il lavoro è rappresentato dalla quantità di forza che viene esercitata su di un corpo per l'unità di tempo

3. A quanto corrispondono 0° Celsius?

A. 100 Fahrenheit
B. 32 Fahrenheit
C. 273 Fahrenheit

4. Quale di questi principi della fluidostatica è stato enunciato da Archimede?

A. Un corpo immerso in un fluido è soggetto al galleggiamento quando il suo peso specifico è inferiore a quello dell'acqua
B. L'acqua esercita una spinta su di un corpo, proporzionale alla sua profondità
C. Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta idrostatica, diretta dal basso verso l'alto, di intensità pari al peso del volume di fluido spostato

5. La legge secondo la quale $F = ma$ (La forza è uguale alla massa per l'accelerazione), rappresenta:

A. La terza legge di Newton
B. La seconda legge di Newton
C. La prima legge di Newton

6. L'equazione che mette in rapporto la velocità sul tempo cosa rappresenta?

A. accelerazione
B. forza gravitazionale
C. potenza

7. Un corpo può avere peso e non massa?

A. No
B. Non si può rispondere perché massa e peso non sono confrontabili
C. Si

8. Un oggetto che pesa 9.8*N* sulla Terra ha la massa di:

A. 9.8*N*
B. 9.8*Kg*
C. 1*Kg*

9. Un moto si dice uniformemente accelerato quando?

A. Il rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato a percorrerlo è costante
B. Lo spazio percorso è direttamente proporzionale al quadrato del il tempo impiegato a percorrerlo
C. Il vettore velocità è costante

10. Una pietra viene lasciata cadere in verticale da una scogliera alta 60 *m*. Quando la pietra è a 50 m dal suolo, la sua accelerazione è pari a:

A. nessuna delle altre risposte riportate
B. 9.8*m/s*
C. circa 30m/s^2

11. Due vettori a e b hanno per somma il vettore c. Il modulo del vettore c risulta essere uguale alla somma dei moduli dei vettori a e b:

A. Indipendentemente dalle relative posizioni di a e b
B. Solo se a e b sono paralleli ed equiversi
C. Solo se a e b hanno la stessa intensità

12. Una cassa del peso di 100*N* è in equilibrio stabile su un piano inclinato alto 2 metri e lungo 4 metri. La forza richiesta per tenere la cassa in equilibrio è di:

A. 100*N*
B. 0*N*
C. 50*N*

13. Se una elettrocalamita si trova in prossimità di un chiodo:

A. non si possono creare forze tra i due corpi
B. ciascuno dei due corpi esercita una forza sull'altro
C. essa esercita una forza sul chiodo

14. Nel moto armonico oscillatorio, l'accelerazione è una grandezza:

A. nulla
B. direttamente proporzionale alla massa
C. direttamente proporzionale allo spostamento

15. Un fucile di massa *M*=3*Kg*, spara un proiettile di massa *m*=25*g* alla velocità di 500*m/s*. La quantità di moto di rinculo del fucile è di:

A. 12.5 *Kg m/s*
B. 4.2 *Kg m/s*
C. 1.5 *Kg m/s*

16. Un corpo può avere massa e non peso?
A. No
B. Non si può rispondere perché massa e peso non sono confrontabili
C. Si

17. Il torchio idraulico, che consente di amplificare una forza, è basato su:
A. Il principio di Pascal
B. Il principio dei vasi comunicanti
C. Il principio di Bernoulli

18. Un asciugacapelli della potenza di 1200*W* in 3 secondi di funzionamento:
A. compie un lavoro di 3600*J*
B. compie un lavoro di 1200*J*
C. applica una forza di 3600*N*

19. La temperatura di un gas viene elevata ad un tratto da 430*K* a 860*K*. La velocità media quadratica delle molecole del gas:
A. aumenta di circa 0.7 volte
B. aumenta di circa 2 volte
C. diminuisce di circa 0.7 volte

20 In una gara di staffetta l'atleta B è partito quando l'atleta A (che dovrà cedergli il testimone) si trovava 10*m* dietro di lui. Se la velocità media di A è stata di 7*m/s* e quella di B di 8*m/s*, il testimone è stato ricevuto da B dopo:
A. 10*s*
B. 8*s*
C. 16*s*

Tabella delle risposte esatte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	B	B	C	B	A	A	C	B	A	B	C	B	C	A	C	A	A	B	A

Soluzioni

1. Risposta esatta: B

Si richiede l'enunciato del principio d'inerzia.

2. Risposta esatta: B

Il lavoro meccanico è una quantità scalare, definita come il prodotto scalare tra il vettore forza e il vettore spostamento.

3. Risposta esatta: B

Nella scala di temperatura Fahrenheit, in uso nei paesi anglosassoni, la temperatura di zero gradi Celsius corrisponde a $32°F$.

4. Risposta esatta: C

Si richiede l'enunciato del principio di Archimede. Il galleggiamento si ottiene quando il peso specifico del corpo è pari a quello del liquido in cui è immerso.

5. Risposta esatta: B

$F = ma$ è il secondo principio della dinamica. Il primo principio è il principio d'inerzia (vedi domanda 1), mentre il terzo principio è il principio di azione e reazione.

6. Risposta esatta: A

L'accelerazione è definita come la variazione di velocità nell'unità di tempo.

7. Risposta esatta: A

Soltanto corpi dotati di massa hanno peso. Il peso è una forza pari alla massa per l'accelerazione di gravità.

8. Risposta esatta: C

L'accelerazione di gravità alla superficie terrestre è $9.8 m/s^2$, quindi la massa è pari al peso diviso l'accelerazione di gravità.

9. Risposta esatta: B

Nel moto uniformemente accelerato l'accelerazione è costante, la velocità varia linearmente nel tempo mentre
la posizione varia col quadrato del tempo.

10. Risposta esatta: A

L'accelerazione di un grave alla superficie terrestre è $9.8 m/s^2$, quindi nessuna risposta è esatta.

11. Risposta esatta: B

Il modulo del vettore somma può essere espresso in termini del teorema di Carnot con il quale, per un angolo tra i due vettori pari a zero, si ottiene che il modulo del vettore somma è pari alla somma dei moduli.

12. Risposta esatta: C

Il piano è inclinato di un angolo 30° con l'orizzontale (il seno dell'angolo è pari a 1/2). Per tenere In equilibrio il corpo, è necessaria una forza pari al peso per il seno dell'angolo d'inclinazione del piano inclinato, quindi una forza di 50*N*.

13. Risposta esatta: B

La calamita esercita una forza sul chiodo che, per il terzo principio della dinamica, esercita una forza uguale e contraria sulla calamita.

14. Risposta esatta: C

In un moto armonico l'accelerazione è proporzionale allo spostamento rispetto alla posizione di equilibrio col segno cambiato.

15. Risposta esatta: A

La quantità di moto è un vettore definito come il prodotto della massa per la velocità. Per il principio della conservazione della quantità di moto, in assenza di forze esterne al sistema la quantità di moto si conserva. Quindi, dato che quando il fucile spara agiscono esclusivamente forze interne al sistema, la quantità di moto totale deve essere nulla prima e dopo lo sparo. Si ottiene che la quantità di moto di rinculo del fucile deve essere uguale e opposta a quella del proiettile, pari a mv.

16. Risposta esatta: C

Nello spazio interstellare, se il campo gravitazionale è trascurabile, qualsiasi corpo dotato di massa ha peso nullo.

17. Risposta esatta: A

Il principio di Pascal garantisce che una pressione si trasmette uniformemente in un fluido. Quindi, se il rapporto F/A, dove A è la superficie del fluido, è costante, esercitando una piccola forza su una piccola superficie, si ottiene una forza amplificata agente su una superficie più ampia. Sul principio di Pascal è basato il freno idraulico.

18. Risposta esatta: A

Il lavoro è pari alla potenza per l'intervallo di tempo di funzionamento dell'apparecchio.

19. Risposta esatta: B

La velocità quadratica media è proporzionale alla temperatura assoluta. Raddoppiando la temperatura la velocità quadratica media delle molecole raddoppia.

20. Risposta esatta: A

Ambedue gli atleti si muovono di moto rettilineo uniforme. La velocità relativa di B rispetto ad A è di 1*m/s* e B ha una distanza di 10*m* che lo separa da A. B impiegherà quindi 10*s* a recuperare la distanza che lo separa da A.

BIBLIOGRAFIA

Acerbi, Buttazzo, *Matematica preuniversitaria di base,* Pitagora Editrice.

Acerbi, Buttazzo, *Analisi matematica ABC,* Vol. I, Pitagora Editrice

Alvino, Carbone, Trombetti, Esercitazioni di Matematica, Vol. I, Parte 1 e 2, Liguori.

Belingieri, Buongiorno, Rosati, *Matematica –30*, Aracne.

Carta, *Struttura del Piano nazionale "informatica per il Liceo scientifico"*documento del liceo scientifico G. Battaglini di Taranto.

CISIA, *Guida alla prova di ammissione per le facoltà di ingegneria,* 2005.

De Marco, *Analisi Zero*, Zanichelli.

Esposito, Fiorenza, *Lezioni di Analisi Matematica*, Analisi 0, Analisi 1, Liguori.

Giambò A., Giambò R., *Matematica pre-universitaria*, Pitagora Editrice.

Halliday, Resnick, Walter, *Fondamenti di Fisica*, Ed. Ambrosiana

Marcellini, Sbordone, *Elementi di Analisi Matematica Uno*, Liguori.

Marcellini, Sbordone, *Esercitazioni di Matematica*, Vol. 1, parte I, Liguori.

Melloni, Pellicani, *Fondamenti di matematica*, Pitagora Editrice.

Mencuccini, Silvestrini, *Fisica I*, Liguori.

Rosati, Casali, *Problemi di Fisica Generale*, Ed. Ambrosiana

Ruffo, *Problemi di Fisica*, Zanichelli.

Segala, *Basi di analisi matematica I per il triennio,* Pitagora Editrice.

UMI, *Syllabus di matematica*, 1999.

Villani, *Cominciamo da zero*, Pitagora Editrice.

APPENDICE:
Esempi di prove di ammissione, autovalutazione e orientamento